

О РАБОТЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЗАРЯДА В ОКРУЖЕНИИ СОЕДИНЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ЭЛЕКТРОДОВ

В.С. Ковалев

Рассмотрен энергетический баланс в системе n проводящих электродов произвольной формы, соединенных внешней сетью и взаимодействующих с подвижным точечным зарядом. Результат согласуется с общими энергетическими соображениями и отличается от известной теоремы Рамо учетом реакции нагрузки.

Рассмотрим произвольную систему из n проводящих электродов, в пространстве между которыми находится свободный точечный заряд. Для общности выводов во внешние цепи всех электродов включим произвольные импедансы нагрузки Z_k . Поверхности электродов обозначим символом S_k , поверхность точечного заряда q окружим бесконечно малой, эквипотенциальной в общем электрическом поле, сферой S_q . Рассмотрим два момента времени, разделенные интервалом времени dt. В первый момент потенциал в межэлектродном пространстве описывается функцией $\varphi(x, y, z)$, во второй — $\varphi'(x, y, z)$. В первый момент в точке пространства, где расположен заряд q, потенциал равен φ_q , потенциалы электродов составляют Φ_k , а во второй — потенциалы получают приращения соответственно $d\varphi_q$ и $d\Phi_k$. Одновременно первоначальные заряды на электродах Q_k получают приращения dQ_k .

Применим к двум потенциальным функциям φ и φ' формулу Грина

$$\int (\varphi' \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi') dV = \int (\varphi' \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi') dS. \quad (1)$$

Поля φ и φ' в принципе независимы и определяются несколькими условиями: действием источников в цепях электродов, величиной и характером подключенных импедансов и положением точечного заряда, однако источники можно считать постоянными, а все изменения — обусловленными начальными условиями на электродах и начальной кинетической энергией точечного заряда.

В левой части (1) интегрирование проводится по объему V, исключая сферу S_q и электроды, поэтому интеграл равен нулю. Основанием является отсутствие в пространстве интегрирования истоков поля и равенство нулю его дивергенции, $\Delta \varphi = 0$. В правой части интегрирование проводится по поверхности бесконечной сферы, где интеграл обращается в нуль, поскольку подинтегральное выражение уменьшается как куб радиуса, а площадь поверхности растет как квадрат, и по поверхностям S_q и S_k . По элементарным представлениям, потоки вектора индукции через поверхности электродов S_k и сферы S_q определяются законом Гаусса, так что $\varphi \int \epsilon (\vec{\nabla} \varphi) dS_q = \varphi_q q$, $\varphi' \int \epsilon (\vec{\nabla} \varphi) dS_q = (\varphi_q + d\varphi_q) q$, $\varphi \int \epsilon (\vec{\nabla} \varphi) dS_k =$
 $= \sum_{k=1}^n \Phi_k (Q_k + dQ_k)$, $\varphi' \int \epsilon (\vec{\nabla} \varphi) dS_k = \sum_{k=1}^n (\Phi_k + d\Phi_k) Q_k$.

Подставив полученные результаты в (1), имеем

$$\sum_{k=1}^n (\Phi_k dQ_k - Q_k d\Phi_k) = q d\varphi_q. \quad (2)$$

Компоненты (2) имеют размерность энергии. В левой части уравнения баланса находится приращение энергии на электродах, в правой — работа, затраченная при движении точечного заряда. Приращения энергии, связанные с абсолютным увеличением заряда, противоположны по знаку приращениям потенциала, обусловленным реакцией нагрузки, поэтому левую часть (2) следует рассматривать как полный дифференциал энергии, запасенной на электродах.

Поделив (2) на dt , можно получить соотношение для токов dQ_k/dt , поступающих на электроды из внешней сети,

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k \frac{dQ_k}{dt} = q \frac{d\varphi_q}{dt} + \sum_{k=1}^n Q_k \frac{d\Phi_k}{dt},$$

а в случае, когда другие электроды (кроме рассматриваемого) заземлены,

$$\Phi \frac{dQ}{dt} = q \frac{d\varphi_q}{dx} \frac{dx}{dt} + Q \frac{d\Phi}{dt},$$

или, обозначая $dx/dt = v$, $d\varphi_q/dx = -E_v$, $dQ/dt = i$,

$$\Phi i = -qvE_v + Q \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Последнее выражение расходится с теоремой Рамо и результатами некоторых других подходов [2,3], обсужденных в [4]. Расхождение с результатом Рамо объясняется тем, что в аналогичной задаче с заземленными электродами в [1] было принято $\Phi = 0$, $q\varphi_q = 0$ и $d\Phi = 1$. Рассмотрим эти допущения.

Условие $d\Phi = 1$ означает наличие в цепи электрода определенной нагрузки, $\Phi = 0$ соответствует предположению о мгновенном равновесии между действием внешней ЭДС и условиями в пространстве, или предположению о том, что ЭДС равна нулю, а пространственный заряд некоторое время находится в неподвижности. Первое из этих предположений является сугубо частным, второе не имеет оснований, потому что на пространственный заряд при любых условиях со стороны индуцированных зарядов действуют силы электростатического взаимодействия. Следует также заметить, что условие $\Phi = 0$, равно как и неприемлемое при уже заданном на заземленных электродах нулевом потенциале условие $q\varphi_q = 0$, принимались в [1] из-за того, что автор не учел энергетические отношения в системе в начальной позиции, что нарушает принцип суперпозиции функций φ и φ' в (1).

Таким образом, широко известная и часто используемая теорема Рамо $i = evE_v$, где внешний ток электрода определяется как произведение заряда электрона e , его скорости v и направленной параллельно вектору v компоненты электрического поля E_v , является только частично верной для случая с короткозамкнутой нагрузкой. Согласно (3), она справедлива, если $q = -e$, $\Phi = 1$ и $d\Phi/dt = 0$.

В общем случае, однако, следует учитывать реакцию нагрузки, и при определении внешнего тока совместно рассматривать (3) и уравнение Кирхгофа для внешней сети [4]. Решение должно включать также коэффициенты индукции для связи процессов во внешней сети с емкостной частью зарядов на электродах Q_1 . В свете этих требований рамки поставленной задачи с одиночным зарядом узки, так как не позволяют аналитически выразить индуцированную часть Q_2 в составе полного заряда на сигнальном электроде. Только с привлечением более общих соображений [4] удастся показать, что $Q_2 = -q\varphi_{1q}/\Phi$, где φ_1 — потенциал поля зарядов Q_1 . В связи с этим напомним, что, в отличие от работы в электрически нейтральной среде или в вакууме, емкость пары электродов при наличии пространственного заряда не равна отношению зарядов на электродах Q к приложенной разности потенциалов Φ .

Таким образом, в общем виде выражение работы элементарного заряда в системе проводящих электродов является более сложным, чем это принято думать, и попытки выразить эту работу через параметры системы нуждаются, в отличие от вывода Рамо, в привлечении уравнений энергетических процессов во внешней сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ramo S. Proc. IRE, 27, 584 (1939).
2. Vass D.G. NIM, 86, 5 (1970).
3. Cavalleri G., Gatti E. NIM, 92, 137 (1971).
4. Ковалев В.С. Препринт ФИАН № 110, М., 1987.

Поступила в редакцию 15 марта 1988 г.