*Краткие сообщения по физике № 8-1988 г.*

УДК 530.145

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

А.Г. Ушверидзе

*Обсуждается возможность использования электростатической аналоговой задачи и нестандартной теории возмущений для исследования спектральных римановых многообразий в моделях квантовой механики.*

**1. Электростатическая аналоговая задача.** Обнаруженная в /1/ связь между классическими системами заряженных частиц и моделями квантовой механики, точно решаемыми для ограниченных участков спектра, упрощает исследование спектральных римановых многообразий как в самих "квазиточно решаемых" (КТР) моделях, так и в их точно нерешаемых обобщениях. В качестве примера рассмотрим систему на прямой, состоящую из M подвижных и N = 3 неподвижных частиц с координатами $\lambda_i$ и $a_\alpha$ и с зарядами +1 и $b_\alpha$. Потенциал взаимодействия логарифмический. Согласно /1/, каждому из N + 2 = 5 интервалов, разделенных точками $a_\alpha$, можно сопоставить некоторую КТР модель (M + 1)-го порядка, устойчивость которой обеспечивается устойчивостью частиц, помещенных в выбранный (физический) интервал. При N = = 3 помимо физического устойчивым может быть только один интервал, выбор которого определяет подтип КТР модели. Каждому равновесному распределению частиц по двум устойчивым интервалам (K частиц в физическом, M – K в нефизическом) соответствует (K-тый) уровень энергии. Координаты частиц в физическом интервале определяют узлы волновых функций. Энергии уровней связаны с положением центра масс всех $\lambda$-частиц.

Эта электростатическая аналогия позволяет легко строить траектории в комплексном пространстве параметров $a_\alpha$ и $b_\alpha$ (констант связи), переводящие один уровень в другой. Приведем пример. Выберем в качестве нефизического и физического интервалов $[a_1 a_2]$ и $[a_2 a_3]$. Обеспечим их устойчивость требованием $b_{1,2,3} > 0$. Пусть начальное положение $\lambda$-частиц соответствует K-тому уровню. Рассмотрим следующую траекторию: 1) $a_2$-частица "освобождается" и переводится в положение устойчивого равновесия: $a_2 \to a_2'$, 2) заряд ее уменьшается до нуля: $b_2 \to b_2' \equiv 0$, при этом положение равновесия корректируется: $a_2' \to a_2''$, 3) ставшая нейтральной $a_2$-частица переносится через L $\lambda$-частиц влево: $a_2'' \to a_2'''$, 4) заряд ее восстанавливается: $0 \equiv b_2' \to b_2$, 5) восстанавливается ее первоначальное положение: $a_2''' \to a_2$. Очевидно, что конечная конфигурация $\lambda$-частиц соответствует (K + L)-тому уровню. Этот же результат может быть получен путем изменения других параметров $a_1$, $a_3$, $b_2$, $b_3$ при постоянном $a_2$. Однако полная или по крайней мере частичная нейтрализация $a_2$-частицы остается в этом подходе необходимой.

Спектральные особенности в КТР моделях в ряде случаев можно интерпретировать как точки возникновения классической неустойчивости в системе частиц. Действительно, если после первых двух шагов описанной выше процедуры сделать заряд $b_2$ малым и отрицательным, то возникнет слабый притягивающий центр, не нарушающий равновесия системы. Если теперь начать перемещать $a_2$-частицу влево, то в некоторый момент устойчивое состояние ближайшей к ней $\lambda$-частицы сменится неустойчивым, и она "упадет" на центр. Можно показать, что 1) в точке возникновения неустойчивости происходит слияние двух положений равновесия – устойчивого и неустойчивого, 2) координаты всех $\lambda$-частиц и, соответственно, уровень энергии имеют в этой точке корневую особенность по параметру $a_2$, связанную со сплетением данного уровня со следующим. Электростатическая аналогия в данном случае помогает вычислить положение всех таких особенностей. Легко видеть, что при малых $b_2$ все они лежат в точках $\lambda_i^{(0)} \pm c_i\sqrt{-b_2}$, где $\lambda_i^{(0)}$ – положения устойчивого равновесия $\lambda$-частиц в отсутствие $a_2$-частицы, а $c_i$ – легко вычисляемые по теории возмущений числа. (При положительных $b_2$ особенности располагаются в комплексно-сопряженных точках.) Аналогичным образом можно найти особенности и по другим параметрам системы (при $|b_2| \ll 1$).

Эти рассуждения обобщаются и на случай точно нерешаемых моделей, возникающих из КТР в пределе $M \to \infty$. При этом параметры $a_\alpha$ и $b_\alpha$ должны зависеть от М так, чтобы в указанном пределе обеспечивалась конечность возникающего потенциала и ненулевая плотность частиц в нефизическом интервале. Тогда последний можно интерпретировать, как "море" Дирака. Действительно, основное состояние соответствует пустому физическому интервалу и полностью заполненному "морю", а построение возбуждений осуществляется переводом частиц из "моря" в физический интервал (например, с помощью описанной выше процедуры). Рассмотрим пример. Пусть имеется вырожденная КТР модель с потенциалом $V = a^2r^6 + 2abr^4 + [b^2 - (2d + 3 + 4M)a]r^2 + d(d-1)/r^2$, соответствующая нефизическому и физическому интервалам $[-\infty, 0]$ и $[0, +\infty]$. Полагая $(2d + 3 + 4M)a - b^2 = \mu$, $2ab = 1$ и переходя к пределу $M \to \infty$, получим точно нерешаемую модель с потенциалом $V = d(d-1)/r^2 + r^4 - \mu r^2$. Соответствующая электростатическая система представляет собой яму вида $U = -(d + 1/2)\ln|\lambda| + b\lambda + a\lambda^2/2$, заполненную М заряженными частицами. При $d + 1/2 = 0$ эта система симметрична относительно точки $\lambda = -2(2N)^{2/3} + (4/3)\mu$ и при увеличении $\mu$ сдвигается вправо (здесь $d + 1/2$ – заряд неподвижной частицы в нуле). При малых $d + 1/2$ спектральные особенности по $\mu$ можно найти описанным выше способом. Для этого следует положить вначале $d = -1/2$ и найти те значения $\mu = \mu_i$, при которых правые $\lambda$-частицы последовательно пересекают точку 0, а затем воспользоваться (как и выше) теорией возмущений. Отметим, что при $d \leqslant -1/2$ особенности лежат при положительных вещественных значениях $\mu$, а при $d \geqslant -1/2$ переходят в комплексную область. Их расположение описывается формулой $\mu_i \pm c_i\sqrt{-1/2 - d}$, где $c_i$ – легко вычисляемые константы. Здесь уместно отметить, что волновая функция К-того уровня рассматриваемой модели имеет К узлов в точках $r = \sqrt{\lambda_i}$, где $\lambda_i \in [0, \infty]$, и бесконечное количество нулей в точках $r = \pm i\sqrt{|\lambda_i|}$, где $\lambda_i \in [-\infty, 0]$.

Все сказанное выше относится к любым (рациональным, тригонометрическим и эллиптическим) КТР моделям, описанным в /2/. Связь этих моделей с вполне интегрируемыми системами позволяет и в них исследовать структуру спектральных римановых многообразий, как в случае конечных, так и в случае бесконечных значений М. Отметим, что на языке этих систем предельный переход к $M = \infty$ означает переход к термодинамическому пределу.

При исследовании спектральных римановых многообразий в общем случае возникает вопрос о физическом смысле комплексных зарядов и координат частиц. Пусть $b_\alpha = b_\alpha^{(1)} + ib_\alpha^{(2)}$, $a_\alpha = a_\alpha^{(1)} + ia_\alpha^{(2)}$, а $\lambda_i$ ищется в виде $\lambda_i = \lambda_i^{(1)} + i\lambda_i^{(2)}$. Оказывается, что комплексное уравнение одномерной электростатики эквивалентно условию равновесия двумерной системы, состоящей из М подвижных частиц с координатами $(\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)})$ и с зарядами +1 и N неподвижных частиц с координатами $(a_\alpha^{(1)}, a_\alpha^{(2)})$, которые обладают одновременно и электрическими $b_\alpha^{(1)}$, и магнитными $b_\alpha^{(2)}$ зарядами. Все эти частицы взаимодействуют между собой согласно уравнениям (2 + 1)-мерной магнитоэлектростатики: $\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$, $\partial_\mu F_\mu = g$, $F_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}$, $j_\mu$ – плотность электрического тока, g – плотность магнитного заряда (зависимость от времени отсутствует). Потенциал, создаваемый одиночным дионом с зарядами $b_\alpha^{(1)}$ и $b_\alpha^{(2)}$, помещенным в начало координат, равен $b_1^{(1)}\ln r + b_2^{(2)}\varphi$. Отметим, что спектральные особенности на этом магнитоэлектростатическом языке отвечают слиянию двух или нескольких положений равновесия системы (как правило, неустойчивых), а дайсоновские сингулярности возникают при слиянии двух или нескольких $\lambda$-частиц с а-частицей, т.е. при образовании кластеров. Соответствующее значение $a_\alpha$ находится из условия равенства нулю полной силы, действующей на кластер со стороны системы. Наличие $Z_N$-симметрии в системе неподвижных частиц позволяет искать конфигурации подвижных частиц, обладающие той же симметрией, что упрощает задачу. В частности, при наличии $Z_2$-симметрии, возникающей из требования эрмитовости гамильтониана, систему подвижных частиц можно расположить на вещественной прямой, что возвращает нас к ранее рассмотренной одномерной задаче.

2. **Нестандартная теория возмущений (НТВ)**. НТВ, предложенная в работах /3,4/, позволяет строить быстро сходящиеся ряды, пригодные, в частности, для вычисления коэффициентов разложения сильной связи $E(\mu) = -\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n E_n$ в различных моделях ангармогического осциллятора. Нами вычислено значительное количество этих коэффициентов для первых четырех уровней энергии в модели с гамильтонианом $H = p^2/2 - \mu x^2/2 + x^4$. Приведем результаты. 1) Для основного ~~уровня~~ $E_n^{(0)} = -0{,}66798625920$, $+0{,}1436687833$, $+0{,}86275656(-2)$, $+0{,}8182089(-3)$, $+0{,}8242922(-4)$, $+0{,}806949(-5)$, $+0{,}727976(-6)$,

+0,561459(−7), +0,29495(−8), −0,6420(−10), −0,4821(−10), −0,8940(−11), −0,1206(−11), −0,1305 (−12), −0,108(−13), −0,45(−15), +0,5(−16), +0,2(−16). 2) Для первого возбужденного уровня $E_n^{(1)}$ = = −4,696795, +0,4939645, +0,116505(−1), +0,15101(−3), +0,3597(−4), +0,6032(−5), +0,6475(−6), +0,527 (−7), + 0,270(−8), − 0,885(−10), − 0,505(−10), − 0,91(−11), − 0,12(−11), − 0,13(−12), −0,1(−13), −0,4(−15), +0,7(−16). 3) Для второго возбужденного уровня $E_n^{(2)}$ = −2,39364402, +0,35780254, +0,1437075(−1), +0,865052(−3), +0,50985(−4), +0,2487(−5), +0,648(−7), −0,446(−8), −0,81(−10), −0,45(−11). 4) Для третьего возбужденного уровня $E_n^{(3)}$ = −7,3357, +0,6183, +0,1177(−1) +0,186(−3), −0,86(−5), −0,10(−5), −0,2(−7). В скобках указан десятичный порядок. Видно, что коэффициенты разложения сильной связи осциллируют с ростом их порядкового номера. Причина этих осцилляций – наличие спектральных особенностей в комплексно-сопряженных точках правой полуплоскости $\mu$. По частоте осцилляций можно оценить положение этих особенностей. Более детальную информацию об их положении можно извлечь из асимптотики рядов НТВ, сравнивая точную асимптотическую формулу со значениями далеких членов ряда, полученными численным путем. Так, для точек сплетения нулевого и второго уровней энергии получаем с учетом шестидесяти членов ряда $\mu_{(0,2)}$ = +4,1941 ± ± 2,1690i, что с 0,03-процентной точностью воспроизводит результат работы /5/.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ушверидзе А.Г. Препринт ФИАН № 33, М., 1988.
2. Ушверидзе А.Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
3. Ушверидзе А.Г. Сборник "Кварки–86", 1986, с. 258.
4. Турбинер А.В., Ушверидзе А.Г. Препринт ИТЭФ № 197, М., 1984.
5. Shanley P.E. Phys. Lett., A 117, N 4, 161 (1986).


Поступила в редакцию 8 апреля 1988 г.