Краткие сообщения по физике № 9-1988 г.

УДК 530. 145

ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ И СИММЕТРИИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В.П. Карасев

Анализируются симметрии многочастичных квантовых систем с фундаментальной "внутренней" SU(n)-симметрией. В пространстве SU(n)-инвариантных состояний определен новый класс алгебр динамической симметрии, которые при n = 2 обобщают алгебры, описывающие парастатистику Грина. Обсуждаются возможности физических приложений результатов.

Многочастичные квантовые системы различной физической природы интенсивно исследуются с момента зарождения квантовой механики /1 – 7/. Эффективным инструментом теоретического анализа таких систем являются теоретико-групповые методы, базирующиеся на применении метода вторичного квантования /2 – 4, 8/ и концепции динамических симметрий /9, 10/.

В настоящей статье, развивающей идеи работ /11, 2, 12/, дан теоретико-групповой анализ многочастичных квантовых систем с фундаментальной "внутренней" $SU(n)$-симметрией одночастичных состояний. Изложены общие математические результаты, и кратко обсуждаются некоторые их физические приложения.

Рассмотрим квантовые системы, порождаемые операторами рождения x_i^{α} и уничтожения $\bar{x}_i^{\alpha} \equiv (x_i^{\alpha})^+$ одночастичных состояний, где верхний индекс $\alpha = 1,...,n$ характеризует некоторую фундаментальную "внутреннюю" $SU(n)$-симметрию, а нижний $i = 1,...,m$ определяет остальные квантовые числа. Пусть операторы $x_i^{\alpha}, \bar{x}_i^{\alpha}$ подчиняются коммутационным соотношениям (КС)

$$x_i^{\alpha}x_j^{\beta} + \lambda x_j^{\beta}x_i^{\alpha} = 0, \quad \bar{x}_i^{\alpha}\bar{x}_j^{\beta} + \lambda\bar{x}_j^{\beta}\bar{x}_i^{\alpha} = 0, \tag{1а}$$

$$\bar{x}_i^{\alpha}x_j^{\beta} + \lambda x_j^{\beta}\bar{x}_i^{\alpha} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}, \tag{1б}$$

которые при $\lambda = 1$ имеют фермиевский, а при $\lambda = -1$ бозевский тип.

Пространством состояний таких систем является фоковское пространство $\mathcal{L}_F$, порождаемое базисными векторами /2, 4, 7, 8/,

$$|\{p_k^{\alpha_k}\}\rangle = N(\{p_k^{\alpha_k}\})\,\Pi(x_1^{\alpha_1})^{p_1^{\alpha_1}}\ldots(x_m^{\alpha_m})^{p_m^{\alpha_m}}|0\rangle \tag{2}$$

где $N(\ldots)$ – нормировочный множитель, $|0\rangle$ – вакуумный вектор: $\bar{x}_i^{\alpha}|0\rangle = 0$, а допустимые значения чисел $p_k^{\alpha_k}$ определяются КС (1). Пространство $\mathcal{L}_F$ содержит (при произвольном m для $\lambda = 1$ и $m \geqslant n$ для $\lambda = -1$) линейное подпространство $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{SU(n)-inv}$ $SU(n)$-инвариантных состояний, порождаемых векторами вида /11/

$$|\{A_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}\rangle = \prod_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant m}(X_{i_1\ldots i_n})^{A_{i_1\ldots i_n}}|0\rangle, \tag{3}$$

где $X_{i_1\ldots i_n} \equiv [x_{i_1}\ldots x_{i_n}] \equiv \epsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}x_{i_1}^{\alpha_1}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}$ – элементарные $SU(n)$-инварианты (поливекторы Картана) /13/, $\epsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ – единичный полностью антисимметричный тензор, по дважды повторяющимся греческим индексам ведется суммирование, а допустимые значения чисел $A_{i_1\ldots i_n}$ определяются КС (1).

Отметим, что не все векторы (3) линейно независимы в силу существования между $X_{i_1\ldots i_n}$ квадратичных соотношений вида /13/

$$X_{i_1\ldots i_n}X_{j_1\ldots j_n} + \lambda X_{j_1 i_2\ldots i_n}X_{i_1 j_2\ldots j_n} + \ldots + \lambda^n X_{j_1 i_1\ldots i_{n-1}}X_{i_n j_2\ldots j_n} = 0. \tag{4}$$

Пространство $\mathcal{L}'$ разлагается в прямую сумму $\mathcal{L}' = \underset{J=0,1,\ldots}{\oplus}\mathcal{L}'_J$ подпространств $\mathcal{L}'_J$ – линейных оболочек векторов (3) с дополнительным ограничением $\Sigma A_{i_1\ldots i_n} = J$. Структура $\mathcal{L}'_J$ детально изучена при $\lambda = -1$ в /11, 12/, где показано, что $\mathcal{L}'_J$-пространства неприводимых представлений (НП) $D(\mathring{J}_n \mathring{O}_{m-n})$, $\mathring{a}_r = \underbrace{a,\ldots,a}_{r}$ алгебры Ли $SU(m)$ с генераторами $(x_i\bar{x}_j) \equiv x_i^{a}\bar{x}_j^{a}$ $((P_1\ldots P_m)$ – старший вес НП), а также даны явные квазимономиальные конструкции ортонормальных базисов $\mathcal{L}'_J$. Эти результаты с учетом специфики КС (1) легко обобщаются и на случай $\lambda = +1$. При этом $\mathcal{L}'$ содержит конечное число подпространств $\mathcal{L}'_J$, которые при фиксированном J преобразуются по НП $SU(m)$, дуальным к НП $D(\mathring{J}_n\mathring{O}_{m-n})$: их схемы Юнга сопряжены схемам Юнга для $D(\mathring{J}_n\mathring{O}_{m-n})$. Несколько сложнее структура $\mathcal{L}'_J$ в случае, когда поливекторы $X_{i_1\ldots i_n}$ в (3) заменяются на "миксты" $X_{i_1\ldots i_s;\, i_{s+1}\ldots i_n} = [x_{i_1}\ldots x_{i_s} y_{i_{s+1}}\ldots y_{i_n}]$, где m_1 величин $x_i = (x_i^{a})$ удовлетворяют КС (1) с $\lambda = -1$, а $m - m_1$ величин $y_i = (y_i^{a})$ –КС (1) с $\lambda = 1$. Однако результаты /11,12/ позволяют полностью и конструктивно описать структуру $\mathcal{L}'_J$ и в этом случае.

Полученные результаты дают кинематические основания для замкнутого описания подсистем агрегированных состояний с элементарными компонентами ("псевдочастицами") $X_{i_1\ldots i_n}$ (и их обобщениями), построенными из "прачастиц" x_i^{a}, y_j^{β}. Для анализа динамики в $\mathcal{L}'$ изучим структурные свойства $SU(n)$-инвариантных операторов, действующих в $\mathcal{L}'$, ограничившись (в основном) для простоты случаем "псевдочастиц" типа $X_{i_1\ldots i_n}$.

Первичными $SU(n)$-инвариантными операторами, определенными в $\mathcal{L}'$, являются $X_{i_1\ldots i_n}$ и им эрмитовски сопряженные операторы $(X_{i_1\ldots i_n})^+$, совпадающие с точностью до знака с $\bar{X}_{i_1\ldots i_n} = [\bar{x}_{i_1}\ldots\bar{x}_{i_n}]$. В силу КС (1) и свойств тензора $\epsilon^{a_1\ldots a_n}$ операторы $X_{i_1\ldots i_n}$ и $\bar{X}_{j_1\ldots j_n}$ удовлетворяют КС вида

$$[X_{i_1\ldots i_n}, X_{j_1\ldots j_n}]_{\lambda,n} \equiv X_{i_1\ldots i_n}X_{j_1\ldots j_n} - (-\lambda)^n X_{j_1\ldots j_n}X_{i_1\ldots i_n} = 0, \quad [\bar{X}_{i_1\ldots i_n}, \bar{X}_{j_1\ldots j_n}]_{\lambda,n} = 0, \tag{5}$$

совпадающими в зависимости от λ и n с КС (1а) бозевского или фермиевского типов. Кроме того, эти операторы удовлетворяют соотношениям типа (4), определяющим своеобразный "бутстреп" многочастичных по $X_{i_1\ldots i_n}$ состояний, а также определяющим линейно независимые $X_{i_1\ldots i_n}$ соотношениям симметрии

$$X_{i_1\ldots i_{s-1} i_r i_{s+1}\ldots i_{r-1} i_s i_{r+1}\ldots i_n} = \lambda X_{i_1\ldots i_n}. \tag{6}$$

Рассмотрим коммутаторы вида $[\bar{X}_{i_1\ldots i_n}, X_{j_1\ldots j_n}]_{\lambda,n}$. Прямые вычисления с помощью КС (1) показывают, что

$$[\bar{X}_{i_1\ldots i_n}, X_{j_1\ldots j_n}]_{\lambda,n} \in \mathrm{Lin}\left\{1,\ (x_j\bar{x}_k), [\bar{\eta}x_{t_1}\ldots x_{t_{n-1}}][\eta\bar{x}_{r_1}\ldots\bar{x}_{r_{n-1}}], \ldots\right\}, \tag{7}$$

где Lin – знак линейной оболочки, 1 – единичный оператор, $su(m)$ – тензоры $[\bar{\eta}x_{t_1}\ldots x_{t_{n-1}}][\eta\bar{x}_{r_1}\ldots]$,... ($\eta$ – промежуточные бозонные операторы) суть полиномы степени $p \leqslant n-1$ по генераторам $(x_j\bar{x}_k)$ алгебры Ли $u(m)$. Отсюда следует, что коммутаторы (7) порождают в $\mathcal{L}'$ динамическую алгебру Ли $P(u(m))$ с элементами из универсальной обертывающей алгебры $U(u(m))$ алгебры Ли $u(m)$, относительно которой $\mathcal{L}$ приводимо, а $\mathcal{L}_J$ – неприводимы. Коммутаторы $[A, X_{i_1 \dots i_n}]_{-,n}$, $[A, \bar{X}_{j_1 \dots j_n}]_{-,n}$ $(A \in P(u(m)))$ порождают $su(m)$-инвариантное векторное пространство V с базисными элементами $X_{i_1 \dots i_n} u$, $\bar{X}_{j_1 \dots j_n} u$, где $u \in P(u(m))$: $[V, V]_{\lambda,n} \subset P(u(m)) + V$, $V = \sum_{g \geqslant 1} V^g$,

где $V^g = \mathrm{Lin}\left\{\underbrace{X_{i_1 \dots i_n} \dots X_{j_1 \dots j_n}}_{g} u, \underbrace{\bar{X}_{i_1 \dots i_n} \dots \bar{X}_{j_1 \dots j_n}}_{g} u \mid u \in P(u(m))\right\}$;

$[P(u(m)), V]_{-,n} \subset V$ и т.д. Резюмируя, получим следующий результат.

Теорема. В пространстве $\mathcal{L}$ реализуется лестничное представление динамической алгебры $VP(u(m)) = P(u(m)) + V$, порожденной КС (5), (7) с учетом (6). При $\lambda = -1$, а также при $\lambda = 1$ и четном n алгебра $VP(u(m))$ имеет структуру алгебры Ли, а при $\lambda = 1$ и нечетном n – супералгебры Ли. Элементы алгебры $VP(u(m))$ удовлетворяют также соотношениям (4) и другим полиномиальным тождествам, следующим из теории инвариантов /13/. Алгебра $VP(u(m))$ имеет также другие естественные реализации в пространстве $\mathcal{L}_F$.

Отметим, что при $n = 2$ КС (7) принимают вид

$$[\bar{X}_{ij}, X_{kl}]_{\lambda,2} = -2(\delta_{jk}\delta_{il} + \lambda\delta_{ik}\delta_{jl}) + \lambda\delta_{jk}(x_l\bar{x}_i) + \lambda\delta_{il}(x_k\bar{x}_j) + \delta_{ik}(x_l\bar{x}_j) + \delta_{jl}(x_k\bar{x}_i). \tag{8}$$

Это позволяет установить связь алгебр $VP(u(m))$ с конечномерными алгебрами Ли $sp(2m)$ при $\lambda = 1$ и $so^*(2m)$ при $\lambda = -1$. Если же вместо бивекторов X_{ij} использовать "миксты" $X_{i;j} \equiv [x_i y_j]$, $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m_2$, то без учета дополнительных соотношений алгебра $VP(u(m))$ изоморфна супералгебре $u(2m_1 m_2 | m)$ /3/. В обоих этих случаях операторы X_{ij}, $\bar{X}_{kl}$; $X_{i;j}$, $\bar{X}_{k;l}$ удовлетворяют трилинейным КС, обобщающим КС Грина для операторов параполей /14, 15/.

Полученные результаты допускают обобщения на случай других классических (ортогональных и симплектических) групп G "внутренней" симметрии. Это дает общую основу для симметрийного анализа агрегированных подсистем, образованных из некоторых "прачастиц" посредством кинематического или динамического конфайнмента по " внутренней" G-симметричной переменной. В частности, алгебры $VP(u(m))$ поставляют строительные блоки для конструирования гамильтонианов и других физических операторов в $\mathcal{L}$, а элементы их центра определяют спектр "свободных" наблюдаемых состояний в $\mathcal{L}'$. Это может оказаться полезным при конструировании и анализе различных составных моделей, находящих широкое применение в физике /5 – 7, 12, 16/. Например, в основе моделей взаимодействующих бозонов и фермионов /5/ лежит использование конструкций, аналогичных X_{ij}, $X_{i;j}$. Другой естественный пример применения развиваемого формализма – изучение $su(2)$-инвариантных структур в рамках алгебраических моделей (типа Дикке) взаимодействия многоуровневых систем с многомодовыми бозонными полями /12/. Отметим, в частности, что бивекторы X_{ij} порождают подалгебру алгебры "сжатых" состояний /17/ многомодовых бозонных полей. Однако детальный анализ возможных приложений требует специального рассмотрения.

Автор благодарен Г.Г. Петрашу за внимание к работе, В.Н. Толстому за полезные обсуждения и В.Я. Файнбергу за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. В е й л ь Г. Теория групп и квантовая механика. М., Наука, 1986.
2. J o r d a n P. Z. Phys., **94**, 531 (1935).
3. А л и ш а у с к а с С.И. ЭЧАЯ, **14**, 1336 (1983).
4. И ц и к с о н К., З ю б е р Ж.-Б. Квантовая теория поля. М., Мир, 1984.
5. A r i m a A., I a c h e l l o F. Phys. Rev. Lett., **35**, 1069 (1975).

6. Р а й д е р Л. Элементарные частицы и симметрии. М., Наука, 1983.
7. У м э д з а в а Х., М а ц у м о т о Х., Т а т и к и М. Термополевая динамика и конденсированные состояния. М., Мир, 1985.
8. Б е р е з и н Ф.А. Метод вторичного квантования. М., Наука, 1986.
9. М а л к и н И.А., М а н ь к о В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., Наука, 1979.
10. П е р е л о м о в А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.
11. K a r a s s i o v V.P. J. Phys., A: Math. Gen., **20**, 5061 (1987).
12. К а р а с е в В.П. В кн. Теоретико-групповые методы в фундаментальной и прикладной физике. М Наука, 1988, с. 54.
13. В е й л ь Г. Классические группы. М., изд. иностр. лит., 1947.
14. G r e e n H.S. Phys. Rev., **90**, 270 (1953).
15. Г о в о р к о в А.Б. ЭЧАЯ, **14**, 1229 (1983).
16. Г р и н б е р г О.У. УФН, **153**, 311 (1987).
17. Д о д о н о в В.В., К у р м ы ш е в Е.В., М а н ь к о В.И. Труды ФИАН, **176**, 128 (1986).

Поступила в редакцию 12 апреля 1988 г.