Краткие сообщения по физике № 9-1988 г.

УДК 530.145

ВЕЙЛЕВСКИЕ ФЕРМИОНЫ НА РЕШЕТКЕ

С.В. Зенкин

Найден новый тип фермионного действия на решетке, отвечающий функциональным интегралам в симметричном (вейлевском) квантовании. Действие нелокально и в безмассовом пределе кирально инвариантно, т.е. распространяется на вейлевские (двухкомпонентные) фермионы.

Пространственно-временная решетка в евклидовой квантовой теории поля обеспечивает регуляризацию теории, служит основой для конструктивного определения функциональных интегралов, дает возможность эффективного выхода за рамки теории возмущений. В то же время, в формулировке теории поля на решетке остается ряд нерешенных принципиальных вопросов. К ним относится проблема определения вейлевских (двухкомпонентных) фермионов на решетке /1/, потребность в котором диктуется непертурбативными задачами объединенных, в частности, электрослабых теорий.

Проблема состоит в несовместимости следующих требований к фермионному решеточному действию: инвариантность относительно трансляций на шаг решетки a; локальность; действительность гамильтониана; киральная инвариантность в безмассовом пределе; исчезновение в непрерывном пределе теории решеточных артефактов ("удвоения фермионов") (теорема Нильсена – Ниномии /1/). Решеточное действие для вейлевских фермионов должно быть кирально инвариантно. Из известных решеточных действий этому условию (при $m = 0$) удовлетворяет только нелокальное действие, предложенное в /2/ (СЛАКовское действие). Однако на примере двумерной теории было показано, что это действие не удовлетворяет требованию о непрерывном пределе /3/.

В настоящей работе найден новый тип кирально инвариантного решеточного действия. Подход основан на построении конечномерной аппроксимации функционального интеграла для квантовой фермионной системы, заданной на пространственной решетке, с исходным действием вида

$$A = a^{D-1}\sum_n \int dt\,[i\bar{\psi}_n(t)\gamma_0\dot{\psi}_n(t) - \sum_m \bar{\psi}_m(t)H_{mn}\psi_n(t) - m\bar{\psi}_n(t)\psi_n(t)],$$

где $\psi_n(t)$, $\bar{\psi}_n(t)$ – D-компонентные грассмановы динамические переменные, определенные на узлах кубической D-1-мерной решетки с шагом a, $n = (n_1, \dots, n_{D-1})$, $-N/2 < n_i \leqslant N/2$; H_{mn} аппроксимирует часть гамильтониана, включающую производные по пространственным направлениям. Основная идея заключается в том, что конечномерные аппроксимации функциональных интегралов определяют кинетическую часть действия "$p\dot{q}$" на временной решетке; полное решеточное действие, т.е. явный вид H_{mn}, восстанавливается после перехода в евклидово пространство из условия инвариантности действия относительно группы симметрии пространственно-временной решетки.

Конечномерные аппроксимации функциональных интегралов определяются тем, какое упорядочение операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ выбирается при квантовании: $\hat{p}\hat{q}$, $\hat{q}\hat{p}$, или симметричное (вейлевское) /4/. Для фермионов этот факт имеет определяющее значение: инвариантное решеточное действие для pq и qp квантований существует только для дираковских фермионов и явно нарушает киральную симметрию /5/; последняя сохраняется только для решеточного действия в симметричном квантовании.

Для определения решеточного действия достаточно построить конечномерную аппроксимацию функционального интеграла для следа оператора эволюции $Z(T) = \mathrm{Tr}[\exp(-i\hat{H}T)]$. Мы исходим из определения функциональных интегралов, предложенного Ф.А. Березиным /4/. Разбивая временной интервал $-T/2 < t \leqslant T/2$ на N отрезков длины a ($T = Na$) и применяя к произведению $[\exp(-i\hat{H}a)]^N$ формализм символов операторов /4/ для симметричного упорядочения, после интегрирования по нединамическим (не входящим в гамильтониан) переменным получаем:

$$Z_N(T) = C_N \int \prod_n d\bar{\psi}_n d\psi_n \exp\left\{ia^D \sum_n [i\bar{\psi}_n \gamma_0 (\nabla_0 \psi)_n - \sum_m \delta_{m_0 n_0} \bar{\psi}_m H_{mn} \psi_n - m\bar{\psi}_n \psi_n]\right\},$$

$$(\nabla_0 \psi)_n = \frac{2}{a} \left[\sum_{l=1}^{N/2+n_0-1} (-1)^l \psi_{n-le_0} - \sum_{l=1}^{N/2-n_0} (-1)^l \psi_{n+le_0}\right], \qquad (1)$$

где $n = (n_0, n_1, ..., n_{D-1})$, $e_0 = (1, 0, ..., 0)$.

Продолжим (1) на мнимое время $t \to -it$ ($a \to -ia$ во временном направлении) и устремим N к бесконечности. Теперь наша система определена на бесконечной D-мерной кубической решетке в евклидовом пространстве. Потребуем, чтобы решеточное действие было инвариантно относительно группы симметрии решетки. Для кубической решетки достаточно потребовать инвариантность относительно подгруппы вращений вокруг ребер решетки на угол $\pi/2$. При повороте решетки на угол φ в плоскости (e_μ, e_ν) $\mu \neq \nu$, евклидовы спиноры ψ_n и $\bar{\psi}_n$ преобразуются как $\psi'_n = \exp(\gamma_\mu \gamma_\nu \varphi/2)\psi_n$, $\bar{\psi}'_n = \bar{\psi}_n \exp(-\gamma_\mu \gamma_\nu \varphi/2)$, причем $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$ /6/. Учитывая это, находим $A_L = \sum_n [\bar{\psi}_n \sum_\mu \gamma_\mu (\nabla_\mu \psi)_n + m\bar{\psi}_n \psi_n]$, $(\nabla_\mu \psi)_n = (2/a) \sum_{m=1} (-1)^{m+1} \times (\psi_{n+me_\mu} - \psi_{n-me_\mu})$.

Это решеточное действие при $m = 0$ кирально инвариантно и, следовательно, распространяется на вейлевские фермионы $\psi_{L,R} = (1/2)(1 \pm \gamma_5)\psi$. Действие A_L нелокально (более нелокально, чем СЛАКовское действие) и не имеет формального предела при $a \to 0$. В то же время пропагатор, определяемый A_L,

$$S_L(p) = \left(\frac{2}{a} \sum_\mu \gamma_\mu \operatorname{tg} \frac{1}{2} ap_\mu + im\right)^{-1} + O(a), \quad -\pi/a < p_\mu \leqslant \pi/a \qquad (2)$$

не приводит к удвоению и имеет хорошо определенный правильный непрерывный предел. Пропагатор (2) непрерывен на всей области определения, включая границы, т.е. не имеет недостатка, присущего пропагатору для СЛАКовского действия /2/. Это аргумент за то, что и теория с взаимодействием (которое здесь может быть введено, как и обычно, калибровочно инвариантным образом) имеет правильный непрерывный предел.

Предложенный подход полностью определяет вейлевские фермионы на евклидовой решетке. Он имеет также то преимущество, что полученное решеточное действие соответствует определенной квантовой системе с пространством состояний с положительно определенным скалярным произведением. Такого соответствия, вообще говоря, нет при других, не связанных с построением функциональных интегралов, способах определения фермионов на евклидовой решетке: распространении гамильтоновой формулировки на евклидову /2, 7/, построении решеточного пропагатора с правильными свойствами /8/, а также дискретизации уравнений стохастического квантования /9/.

Автор благодарен В.М. Лобашеву за поддержку работы, Ф.В. Ткачеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nielsen H. B., Ninomiya M. Nucl. Phys., **B 185**, 20 (1981); **B 193**, 173 (1981); Phys. Lett., **105B**, 219 (1981).
2. Drell S. D., Weinstein M., Yankielowicz S. Phys. Rev., **D14**, 487, 1627 (1976); Karsten L. H., Smit J. Phys. Lett., **85B**, 100 (1979).
3. Bodwin G. T., Kovacs E. V. Phys. Rev., **D35**, 3198 (1987).
4. Березин Ф. А. ТМФ, **6**, 194 (1971); УФН, **132**, 497 (1980); Berezin F. A., Marinov M. S. Ann. Phys. (N. Y.), **104**, 336 (1977).
5. Зенкин С. В. Труды Межд. семинара "Кварки-88", Тбилиси, 1988.
6. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. ЛГУ, Л., 1976.
7. Quinn H., Weinstein M. Phys. Rev. Lett., **57**, 2617 (1987).
8. Rebbi C. Phys. Lett., **B 186**, 200 (1987).
9. Tanaka S. Preprint WU-HEP-87-3, Waseda Univ., Tokyo, 1987.

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию 25 марта 1988 г.