Краткие сообщения по физике № 9-1988 г.

УДК 530.145

УСТОЙЧИВЫЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С РЕШЕНИЯМИ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.Г. Ушверидзе

Произведена классификация устойчивых (одномерных и многомерных) точно решаемых и квазиточно решаемых моделей квантовой механики.

В работе /1/ было показано, что уравнение Риккати $y'(\lambda) + y^2(\lambda) + 2B(\lambda)y(\lambda) + C(\lambda) = 0$ с $B(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda - a_\alpha)]$ и $C(\lambda) = d + \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda - a_\alpha)]$ при $d = \rho^2 (M^2 + 2M \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha)$ решается в классе функций вида $y(\lambda) = \sum_{i=1}^{M} \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda - \lambda_i)]$. При этом значения спектральных параметров c_α находятся из системы $\sum_{k=1}^{M}{}' \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda_i - \lambda_k)] + \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda_i - a_\alpha)] = 0$, $c_\alpha = 2 \sum_{i=1}^{M} b_\alpha \rho \operatorname{ctg}[\rho(\lambda_i - a_\alpha)]$. Каждому такому уравнению можно сопоставить линейное уравнение вида $[-\partial^2/\partial x^2 + V(x) - E]\psi(x) = 0$, где $V(x) - E = -AC + A\left[(B - A'/4A)' + (B - A'/4A)(B + A'/4A)\right]$. Здесь $A = \omega \prod_{\alpha=1}^{N} \rho^{-1} \sin[\rho(\lambda - a_\alpha)]$, $\lambda = \lambda(x)$ определяется из условия $[\partial\lambda(x)/\partial x]^2 = A(\lambda)$. Это уравнение описывает точно решаемые (ТР) или квазиточно решаемые (КТР) модели, в зависимости от выбора N. Конкретный тип модели определяется заданием физического (т.е. отображаемого на ось x) интервала между соседними вещественными особыми точками функции $\sqrt{A(\lambda)}$. Параметр ω выбирается из условия положительности $A(\lambda)$ в физическом интервале. Требование эрмитовости гамильтониана и устойчивости модели накладывает определенные ограничения на параметры b_α. Все многообразие ТР и КТР моделей получается в результате вырождения функции $B(\lambda)$, т.е. в результате слияния ее полюсов или увода их на бесконечность. Родом модели будем называть число N, равное количеству простых полюсов функции $B(\lambda)$ до вырождения. Далее перечисляются одномерные устойчивые ТР и КТР модели, однозначно характеризуемые функцией $B(\lambda)$, физическим интервалом, интервалом на оси, где формулируется шредингеровская задача с нулевыми граничными условиями, функцией $\lambda(x)$, а также условиями устойчивости. Потенциалы этих моделей и их спектры восстанавливаются с помощью формул, приведенных выше.

А. Рациональный случай ($\rho = 0$), N = 2, ТР модели.

1. $B = \beta\lambda^{-1} + \gamma(\lambda - 1)^{-1}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi/2]$, $\beta > 1/2$, $\gamma > 1/2$.
2. $B = \beta(\lambda + 1)^{-1} + \gamma\lambda^{-1}$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = \operatorname{sh}^2 x$, $x \in [0, \infty]$, $\gamma > 1/2$, $\beta + \gamma + M < 1/2$.
3. $B = \beta(\lambda - i)^{-1} + \beta^*(\lambda + i)^{-1}$, $\lambda \in [-\infty, \infty]$, $\lambda(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in [-\infty, \infty]$, $\beta + \beta^* + M < 1/2$.
4. $B = \beta\lambda^{-1} + \gamma\lambda^{-2}$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = \exp x$, $x \in [-\infty, \infty]$, $\beta + M < 1/2$.
5. $B = \beta\lambda^{-1} - \gamma$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = x^2$, $x \in [0, \infty]$, $\beta > 1/2$, $\gamma > 0$.
6. $B = -\beta - \gamma\lambda$, $\lambda \in [-\infty, \infty]$, $\lambda(x) = x$, $x \in [-\infty, \infty]$, $\gamma > 0$.

Б. Рациональный случай ($\rho = 0$), N = 3, КТР модели.

1. $B = \beta(\lambda + a)^{-1} + \gamma(\lambda + 1)^{-1} + \delta\lambda^{-1}$, $a > 1$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = \operatorname{sc}^2(x, m)$, $x \in [0, K(m)]$, $m = (a - 1)/a$, $\delta > 1/2$, $\beta + \gamma + \delta + M < 1/2$.
2. $B = \beta(\lambda + a)^{-1} + \gamma\lambda^{-1} + \delta(\lambda - 1)^{-1}$, $a > 0$, $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda(x) = a m \operatorname{sd}^2(x, m)$, $x \in [0, K(m)]$, $m = (a + 1)^{-1}$, $\gamma > 1/2$, $\delta > 1/2$.
3. $B = \beta\lambda^{-1} + \gamma(\lambda - a)^{-1} + \gamma^*(\lambda - a^*)^{-1}$, $|a| \neq 1$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = \operatorname{sc}^2(x, m) \times \operatorname{dn}^2(x, m)$, $x \in [0, K(m)]$, $m = (a + a^* + 2)/4$, $\beta > 1/2$, $\beta + \gamma + \gamma^* + M < 1/2$.
4. $B = \beta(\lambda + 1)^{-1} + \gamma(\lambda + 1)^{-2} + \delta\lambda^{-1}$, $\lambda \in [0, \infty]$, $\lambda(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $x \in [0, \pi/2]$, $\delta > 1/2$, $\beta + \delta + M < 1/2$.

5. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}-\beta,\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=\sin^2 x,\ x\in[0,\pi/2],\ \gamma,\delta>1/2.$
6. $B=\beta(\lambda+1)^{-1}+\gamma\lambda^{-1}+\delta\lambda^{-2},\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=\mathrm{sh}^{-2}x,\ x\in[0,\infty],\ \delta>0,\ \beta+\gamma+M<1/2.$
7. $B=\beta\lambda^{-1}+\gamma(\lambda-1)^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-2},\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=\mathrm{th}^2 x,\ x\in[0,\infty],\ \beta>1/2,\ \delta>0.$
8. $B=\gamma(\lambda+1)^{-1}+\delta\lambda^{-1}-\beta,\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=\mathrm{sh}^2 x,\ x\in[0,\infty],\ \beta>0,\ \delta>1/2.$
9. $B=\beta\lambda^{-1}+\gamma\lambda^{-2}+\delta\lambda^{-3},\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=x^{-2},\ x\in[0,\infty],\ \delta>0,\ \beta+M<1/2.$
10. $B=\delta\lambda^{-1}-\beta-\gamma\lambda,\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=x^2,\ x\in[0,\infty],\ \gamma>0,\ \delta>1/2.$
11. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta\lambda^{-2}-\beta,\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=\exp x,\ x\in[-\infty,\infty],\ \delta>0,\ \beta>0.$

В. Рациональный случай ($\rho=0$), $N=4$, КТР модели.

1. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\epsilon(\lambda-a)^{-1}+\rho(\lambda-\beta)^{-1},\ a>\beta>1,\ \lambda\in[0,1],$
$\lambda(x)=a[(a-1)\mathrm{ns}^2(x,m)+1]^{-1},\ x\in[0,K(m)],\ m=(a-\beta)(a-1)^{-1}\beta^{-1},$
$\gamma>1/2,\ \delta>1/2,\ \gamma+\delta+\epsilon+\rho=-(M-1)/2.$
2. $B=\gamma(\lambda+a)^{-1}+\delta\lambda^{-1}+\epsilon(\lambda-1)^{-1}+\rho(\lambda-\beta)^{-1},\ a>0,\ \beta>0,\ \lambda\in[0,1],$
$\lambda(x)=a[(a+1)\mathrm{ns}^2(x,m)-1]^{-1},\ x\in[0,K(m)],\ m=(a+\beta)\beta^{-1}(a+1)^{-1},$
$\delta>1/2,\ \epsilon>1/2,\ \gamma+\delta+\epsilon+\rho=-(M-1)/2.$
3. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\rho(\lambda-a)^{-1}+\rho^*(\lambda-a^*)^{-1},\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=$
$=q[1-\mathrm{cn}(x,m)][(p+q)+(p-q)\mathrm{cn}(x,m)]^{-1},\ x\in[0,2K(m)],\ m=[1-(p-q)^2]\times$
$\times[4pq]^{-1},\ p=\sqrt{2+a+a^*},\ q=|a|,\ \gamma,\ \delta>1/2,\ \gamma+\delta+\rho+\rho^*=-(M-1)/2.$
4. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\epsilon(\lambda-a)^{-1}+\rho(\lambda-a)^{-2},\ a>1,\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=$
$=a[(a+1)\sin^{-2}x+1]^{-1},\ x\in[0,\pi/2],\ \gamma,\ \delta>1/2,\ \gamma+\delta+\epsilon=-(M-1)/2.$
5. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\epsilon(\lambda-1)^{-2}+\rho(\lambda-a)^{-1},\ a>1,\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=$
$=a[(a-1)\mathrm{cth}^2x+1]^{-1},\ x\in[0,\infty],\ \gamma>1/2,\ \epsilon>0,\ \gamma+\delta+\rho=-(M-1)/2.$
6. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\epsilon(\lambda-1)^{-2}+\rho(\lambda-1)^{-3},\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=x^2[1+x^2]^{-1},$
$x\in[0,\infty],\ \gamma>1/2,\ \rho>0,\ \gamma+\delta=-(M-1)/2.$
7. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta(\lambda-1)^{-1}+\epsilon(\lambda-1)^{-2}+\rho(\lambda+a)^{-1},\ a>0,\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=$
$=a[(a+1)\mathrm{cth}^2x-1]^{-1},\ x\in[0,\infty],\ \gamma>1/2,\ \epsilon>0,\ \gamma+\delta+\rho=-(M-1)/2.$
8. $B=\gamma\lambda^{-1}+\delta\lambda^{-2}+\epsilon(\lambda-1)^{-1}+\rho(\lambda-1)^{-2},\ \lambda\in[0,1],\ \lambda(x)=[1+e^{-x}]^{-1},$
$x\in[-\infty,\infty],\ \delta,\rho>0,\ \gamma+\epsilon=-(M-1)/2.$

Г. Тригонометрический случай ($\rho=1$), $N=2$, КТР модели.

1. $B=\beta_-\mathrm{ctg}(\lambda-a)+\beta_+\mathrm{ctg}(\lambda+a),\ a<\pi/2,\ \lambda\in[-a,a],\ \lambda(x)=\arcsin[\sin a\times$
$\times\,\mathrm{sn}(x,m)],\ x\in[-K(m),\ K(m)],\ m=\sin^2 a,\ \beta_->1/2,\ \beta_+>1/2.$

Д. Гиперболический случай ($\rho=i$), $N=2$, КТР модели.

1. $B=\beta_-\mathrm{cth}(\lambda-a)+\beta_+\mathrm{cth}(\lambda+a),\ a<\infty,\ \lambda\in[-a,a],\ \lambda(x)=\mathrm{arcsh}[\mathrm{sh}\,a\times$
$\times\,\mathrm{sn}(x,m)],\ x\in[-K(m),K(m)],\ m=-\mathrm{sh}^2 a,\ \beta_->1/2,\ \beta_+>1/2.$
2. $B=\beta\,\mathrm{cth}(\lambda-ia)+\beta^*\mathrm{cth}(\lambda+ia),\ a<\pi/2,\ \lambda\in[-\infty,\infty],\ \lambda(x)=$
$=\mathrm{arcsh}[\sin a\cdot\mathrm{sc}(x,m)],\ x\in[-K(m),K(m)],\ m=\cos^2 a,\ \beta+\beta^*+M<0.$
3. $B=\beta\,\mathrm{th}\,\lambda+\gamma\,\mathrm{sech}^2\lambda,\ \lambda\in[-\infty,\infty],\ \lambda(x)=\mathrm{arcsh}(\mathrm{tg}\,x),$
$x\in[-\pi/2,\ \pi/2],\ \beta+M<0.$
4. $B=\beta\,\mathrm{cth}\,\lambda+\gamma\,\mathrm{cosech}^2\lambda,\ \lambda\in[0,\infty],\ \lambda(x)=\mathrm{arcsh}(\mathrm{cosech}\,x),$
$x\in[0,\infty],\ \gamma>0,\ \beta+M<0.$

Перейдем к рассмотрению многомерных (К-мерных) ТР и КТР моделей. Уравнения Шредингера для этих моделей имеют вид $(-\widetilde{\Delta}+\widetilde{V}-\widetilde{E})\widetilde{\psi}=0$, где $\widetilde{\Delta}=g^{1/2}(\partial/\partial\lambda_i)[g^{ik}g^{-1/2}\partial/\partial\lambda_k]$, $g\equiv\det\|g^{ik}\|$, $g^{ik}=\delta_{ik}\prod_{l=1}^{K}{}'\rho\sin^{-1}[\rho(\lambda_i-\lambda_l)]A(\lambda_i)$, $\widetilde{V}-\widetilde{E}=\sum_{i=1}^{K}\prod_{l=1}^{K}{}'\rho\sin^{-1}[\rho(\lambda_i-\lambda_l)](V(\lambda_i)-E)$. Функции $A(\lambda)$ и $V(\lambda)-E$ определены выше. Назовем интервал между вещественными особыми точками функции $\sqrt{A(\lambda)}$ положительным (отрицательным), если знак функции $A(\lambda)\omega^{-1}$ в нем положительный (отрицательный). Для того, чтобы модель была устойчивой, К переменных λ_i должны быть распределены по $N+1$ интервалам так, чтобы знаки этих интервалов чередовались. Кроме того, все физические (т.е. занятые переменными λ_i) интервалы должны быть устойчивыми /1, 2/. Все многообразие многомерных ТР и КТР моделей возникает при вырождении функции $B(\lambda)$ (см. выше). В качестве примера рассмотрим подробно рациональный случай ($\rho = 0$). Отметим, что в случае $K = N$ возникают модели с бесконечно-кратно вырожденным нулевым "уровнем энергии". Однако эти модели неустойчивы, и соответствующие им "волновые функции" ненормируемы. Если отождествить λ_i с К-мерными эллипсоидальными координатами, то в декартовых координатах уравнение примет вид $\left\{-\Delta + \sum_{a=1}^{N} (b_a - 1/4)(b_a - 3/4)\, 4x_a^{-2}\right\}\psi(x) = 0$. Оно имеет бесконечное множество полиномиальных решений любого порядка. Случай $K = N - 1$ описывает многомерные ТР устойчивые модели как в плоском, так и в кривых пространствах. Бесконечные серии КТР моделей произвольного порядка возникают при $K = N - 2$ и $K = N - 3$ при условии, что $\sum_{a=1}^{N} b_a = -(M-1)/2$. Это условие несовместимо с условием устойчивости бесконечных и полубесконечных физических интервалов, поэтому при $K = N - 3$ все физические интервалы должны быть конечными. При $K < N - 3$ могут существовать только конечные серии КТР моделей. Подавляющее большинство КТР моделей описываются уравнениями Шредингера на кривых поверхностях с метрикой $g_{ik} = (g^{ik})^{-1}$. Уравнения этих поверхностей приведены в работе /3/. Для того, чтобы пространство стало плоским, функция $B(\lambda)$ должна быть $N = K$-кратно вырожденной на бесконечности. В этом случае координаты λ_i могут быть отождествленны с К-мерными эллипсоидальными координатами. Тогда переход к декартовым координатам дает модели с потенциалами вида $V(x) = \sum_{a=1}^{K} f_a x_a^{-2} + P(x_1^2, .., x_K^2)$, где P – полиномы от x_a^2 $2(N-K)-1$-го порядка. Отметим, что бесконечных серий КТР моделей в случае $K = N - 3$ в плоском пространстве не существует, что связано с наличием полубесконечного интервала в случае трехкратно вырожденной бесконечно удаленной точки. В качестве иллюстрации перечислим все типы ТР и КТР моделей для случая $N = 5$. Каждый тип можно охарактеризовать диаграммой, представляющей ось λ с расположенными на ней полюсами функции $B(\lambda)$. Простые полюса будем изображать символом о, двойные – символом ●, а тройные – символом □. Физические и нефизические интервалы будем изображать символами = и —.

А. $K = 4$, ТР модели. Имеется: две невырожденные диаграммы =○=○=○=○—○—, —○=○=○=○=○—, три вырожденные = ○=○=○=●—, =○=○=○=●, =○=○=○=○—○. Последняя диаграмма описывает модели в плоском пространстве (четырехмерные сферически несимметричные гармонические осцилляторы).

Б. $K = 3$, КТР модели. Имеется: четыре невырожденные диаграммы =○=○=○—○—○—, =○=○—○—○=○—, =○—○—○=○=○—, —○—○=○=○=○—, а также 18 вырожденных диаграмм, например: =○=○=□—, =○=□=○—, =○=○=●—○— и т.д. Существует диаграмма =○=○=○—●, описывающая модели в плоском пространстве. Потенциалы этих моделей даны в работе /4/.

В. $K = 2$, КТР модели. Имеется: три допустимые невырожденные диаграммы —○=○=○—○—○—, —○—○=○=○—○— и —○=○—○—○=○—, а также 7 вырожденных. Все они описывают модели в кривом пространстве.

В заключение отметим, что тригонометрические, гиперболические и эллиптические КТР модели существуют только в кривых пространствах, и могут быть расклассифицированы с помощью диаграмм, аналогичных приведенным выше. Более развернутое изложение затронутых в настоящей статье вопросов можно найти в работах /2, 5/.

Автор благодарен И.М. Гельфанду, В.И. Манько и Е.С. Фрадкину за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 134, М., 1988.
3. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 158, М., 1988.
4. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 96, М., 1988.
5. Ушверидзе А. Г. Препринты ФИАН №№ 133, 140, М., 1988.

Поступила в редакцию 13 мая 1988 г.