УДК 533.951

О ТУРБУЛЕНТНОМ НАГРЕВЕ ИОНОВ

И. В. Кузора, В. П. Силин, С. А. Урюпин

Изложены результаты основ теории турбулентного нагрева ионов плазмы, содержащей ионы двух сортов. Для основной массы ионов, описывающейся максвелловским распределением, получены уравнения временной эволюции температур ионов. Установлена возможность изотермического нагрева ионов разных сортов.

1. В плазме с развитой ионно-звуковой турбулентностью (ИЗТ) эффективно нагревается основная масса тепловых частиц – электронов и ионов, скорости которых малы по сравнению со скоростью звука [1, 2]. Характерное время удвоения температуры ионов в турбулентной плазме оказывается много меньше эффективной частоты релаксации энергии ионов при обычных электрон-ионных столкновениях. Турбулентный нагрев ионов теория ИЗТ связывает с процессом индуцированного рассеяния ионно-звуковых волн на ионах [3, 4].

Первоначально [3 – 5] теория ИЗТ строилась для плазмы с одним сортом ионов. Однако практика исследовательской работы в области управляемого термоядерного синтеза потребовала построения теории ИЗТ для более сложных полностью ионизованных плазм. Следует подчеркнуть, что интерес к таким плазмам возник давно [6 – 12]. Однако теория ИЗТ для таких плазм стала развиваться лишь в последнее время [13, 14]. В настоящем сообщении будут изложены результаты теории нагрева ионов в плазме с двумя сортами ионов в таком часто встречающемся случае, когда отношения зарядов к массам ионов равны.

2. Для плазмы, в которой дебаевский радиус электронов r_{De} значительно превышает дебаевские радиусы ионов $r_{D\alpha}$ и выполнено условие неизотермичности

$$Z_\alpha T_e \ll T_\alpha, \tag{2.1}$$

где T_e – температура электронов, а T_α – температура и $e_\alpha = Z_\alpha|e|$ – заряд ионов сорта α, могут существовать ионно-звуковые волны с законом дисперсии

$$\omega_s = kv_s/\sqrt{1+(kr_{De})^2}, \tag{2.2}$$

где $v_s = \omega_L r_{De}$ – скорость быстрых ионно-звуковых волн, $\omega_L^2 = \sum\limits_\alpha \omega_{L\alpha}^2$, $\omega_{L\alpha} = \sqrt{4\pi n_\alpha e_\alpha^2/m_\alpha}$ – ленгмюровская частота ионов сорта α. Кроме таких волн возможны также медленные звуковые волны. Следуя работе [14], будем рассматривать условия, в которых медленные волны сильно затухают и на турбулентность влияют слабо.

Причиной возникновения ИЗТ является эффективная плотность силы $\mathbf{R} = (0,0,R)$.

$$R = en_eE - \partial p/\partial z > 0, \tag{2.3}$$

где n_e и p – плотность и давление электронов, E – квазистационарная напряженность электрического поля в плазме. Согласно работе [14], когда отношения зарядов к массам одинаковы для всех сортов ионов в плазме, декремент ионно-звуковых волн из-за индуцированного рассеяния на ионах имеет вид

$$\gamma_{NL}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi\omega_L^4}\left[\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2\omega_{L\alpha}^2 v_{T\alpha}^2}{m_\alpha^2}\right]\frac{k^2dk}{d\omega}\frac{\partial}{\partial k}\left\{\frac{k^4dk}{d\omega}\int d\Omega_{k'}\frac{(\mathbf{kk}')^2[\mathbf{kk}']^2}{(kk')^4}N(k,\cos\theta_{k'})\right\}, \tag{2.4}$$

где $N(k,\cos\theta)$ – распределение числа ионно-звуковых волн по волновым числам k и углам θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{R}$. Отличие выражения (2.4) от возникающего в плазме с одним сортом ионов определяется суммой в квадратных скобках. С использованием этого выражения подобно [5, стр. 147] находим

$$N(k,\cos\theta) = \Phi(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_L^5 v_s^3}{\omega_{Le}}\left[\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2\omega_{L\alpha}^2 v_{T\alpha}^2}{m_\alpha^2}\right]^{-1} k^{-4}(1+k^2r_{De}^2)^{-3/2}\times$$
$$\times\left[\ln\frac{\sqrt{1+k^2r_{De}^2}}{kr_{De}} - \frac{0.5}{(1+k^2r_{De}^2)} - \frac{0.25}{(1+k^2r_{De}^2)^2}\right], \tag{2.5}$$

где ω_{Le} – ленгмюровская частота электронов, $v_{T\alpha} = \sqrt{kT_\alpha/m_\alpha}$ – тепловая скорость ионов сорта α. Явный вид угловой зависимости в формуле (2.5) зависит от величины турбулентного числа Кнудсена

$$K_N = \frac{12\pi^2}{\lambda}\frac{R\omega_{Le}^2}{v_s^3\omega_L^7}\left[\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2\omega_{L\alpha}^2 v_{T\alpha}^2}{m_\alpha^2}\right], \tag{2.6}$$

где $\lambda \cong 0.5$. В дальнейшем нам понадобятся лишь моменты функции $\Phi(\cos\theta)$ вида $M_n \equiv \int\limits_0^1 dx x^n \Phi(x)$. Приведем их значения в двух предельных случаях. В пределе малых чисел Кнудсена $K_N < (1+\delta)^2$ имеем

$$M_n = \frac{4K_N}{3\pi(1+\delta)}\Big[\epsilon^{\alpha_\epsilon - 1} - \frac{1-\epsilon^{\alpha_\epsilon}}{\alpha_\epsilon}(n-1)\Big],\ n = 0, 1, ..., \tag{2.7}$$

где $\alpha_\epsilon \cong \ln 2/\ln\lfloor(1+\delta)^2/K_N\rfloor \ll 1$, $\epsilon \cong 2K_N/3\pi(1+\delta)^2\alpha_\epsilon \ll 1$, $\delta = \sum\limits_\alpha \delta_\alpha$, а параметр $\delta_\alpha = f_\alpha(v_s)/f_e(v_s)$ представляет собой отношение функции распределения горячих резонансных ионов сорта α к функции распределения электронов при $v = v_s$. В противоположном пределе, когда $K_N \gg (1+\delta)^2$, функция $\Phi(\cos\theta)$ пропорциональна $\sqrt{K_N}$, а ее моменты равны

$$M_0 = 2.04\sqrt{K_N},\ M_2 = 1.10\sqrt{K_N},\ M_4 = 0.72\sqrt{K_N}. \tag{2.8}$$

3. Получим теперь уравнения для температур ионов, отвечающих в нулевом приближении максвелловскому распределению ионов

$$f_\alpha(v,t) = \frac{n_\alpha m_\alpha^{3/2}}{(2\pi\kappa T_\alpha(t))^{3/2}}\exp\left(-\frac{m_\alpha v^2}{2\kappa T_\alpha(t)}\right). \tag{3.1}$$

В качестве исходных воспользуемся кинетическими уравнениями для тепловых ионов сорта α

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \mathrm{St}\,\lfloor f_\alpha, f_\beta\rfloor + \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j}, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{St}\lfloor f_\alpha, f_\beta\rfloor$ – интеграл столкновений Ландау ионов сорта α с частицами сорта β. $D_{ij}^{(\alpha)}$ – тензор диффузии в пространстве скоростей, описывающий взаимодействие ионов с волнами при индуцированном рассеянии. В уравнении (3.2) опустим интеграл столкновений ионов с электронами, что оправдано в обсуждаемых здесь условиях большого превышения порога неустойчивости. Ограничимся таким случаем, когда распределение ионов при скоростях $v < v_s$ – максвелловское. Для этого примем, что в этой области скоростей сумма интегралов столкновений Ландау в правой части уравнения (3.2) много больше второго слагаемого, то есть сумма эффективных частот столкновений ионов много больше эффективной частоты столкновений ионов с турбулентными шумами. Обсуждение этого условия приведено в разделе 4. Тогда в нулевом приближении по взаимодействию ионов с турбулентными пульсациями получим решение (3.1). Уравнение для температуры получается из уравнения (3.2) путем домножения на $m_\alpha v^2/3n_\alpha\kappa$ и интегрирования по скоростям. В итоге имеем

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = \frac{m_\alpha}{3n_\alpha\kappa}\int d\mathbf{v}v^2\frac{\partial}{\partial v_i}D_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j} + \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(T_\beta - T_\alpha), \tag{3.3}$$

где частоты ион-ионных столкновений определяются выражением [15]

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{4}{3}\frac{\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 \Lambda n_\beta (m_\alpha m_\beta)^{3/2}}{(\kappa T_\alpha \kappa T_\beta)^{5/2}(2\pi)^3}\int d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\beta \exp\left[-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2\kappa T_\alpha} - \frac{m_\beta v_\beta^2}{2\kappa T_\beta}\right]\times$$
$$\times v_{\alpha i} v_{\beta j}\frac{(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)^2\delta_{ij} - (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)_i(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)_j}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|^3}, \tag{3.4}$$

Λ – кулоновский логарифм, а тензор диффузии имеет вид

$$D_{ij}^{(\alpha)} \cong \frac{(2\pi)^3}{2m_\alpha^2\omega_L^4}\int d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\omega\omega'^3 k_i'' k_j'' N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}')\delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v})|\Lambda_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{v})|^2. \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\omega'' = \omega - \omega'$ – волновой вектор и частота биений взаимодействующих волн, а амплитуда $\Lambda_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{v})$ имеет вид [14]

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{v}) = \frac{e_\alpha^2}{(2\pi)^3 m_\alpha\omega'}\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\left(\left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} + \frac{\mathbf{k}'}{\omega'}\right)\mathbf{v}\right). \tag{3.6}$$

Из (3.4) следует

$$\nu_{\alpha\beta} = 2\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e_\alpha^2 e_\beta^2\Lambda n_\beta (m_\alpha m_\beta)^{1/2}}{(m_\beta\kappa T_\alpha + m_\alpha\kappa T_\beta)^{3/2}}. \tag{3.7}$$

В предельных случаях сильно различающихся масс из (3.7) имеем

$$\nu_{\alpha\beta} = 2\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e_\alpha^2 e_\beta^2\Lambda n_\beta}{m_\alpha^{1/2}(\kappa T_\alpha)^{3/2}}\cdot\begin{cases} m_\alpha/m_\beta, & m_\beta \gg m_\alpha, \\ \left(\frac{T_\alpha^3 m_\beta}{T_\beta^3 m_\alpha}\right)^{1/2}, & m_\alpha \gg m_\beta. \end{cases} \tag{3.8}$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части уравнения (3.3). Из-за экспоненциальной малости функции распределения ионов при $v \sim v_s$ ясно, что основной вклад в интеграл дадут скорости $v \sim v_{T\alpha} \ll v_s$. Для таких скоростей разложим в (3.5) δ-функцию по малому параметру $vk''/\omega'' \sim v/v_s \ll 1$. Тогда, используя (3.1), (3.5), (3.6), представим первое слагаемое в правой части (3.3) в виде

$$\frac{m_\alpha}{3n_\alpha\kappa}\int d\mathbf{v}v^2\frac{\partial}{\partial v_i}D_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j}=\frac{\kappa T_\alpha}{\tau_\alpha}, \tag{3.9}$$

где

$$\tau_\alpha^{-1}=\frac{\omega_{L\alpha}^4}{3n_\alpha^2m_\alpha^2\omega_L^4}\int\frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^5}\delta(\omega-\omega')N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}')[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right)^2. \tag{3.10}$$

Далее, используя спектр ИЗТ (2.5), находим

$$\tau_\alpha^{-1}=\frac{\omega_L^{11}\omega_{L\alpha}^4r_{De}^4\eta}{96(4\pi)^2n_\alpha^2m_\alpha^2\omega_{Le}^2}\left[\sum_\beta\frac{e_\beta^2\omega_{L\beta}^2v_{T\beta}^2}{m_\beta^2}\right]^{-2}\times$$
$$\times[M_0^2+4M_0M_2-6M_0M_4-24M_2^2+60M_2M_4-35M_4^2], \tag{3.11}$$

где $\eta\cong 0.97$. Согласно (2.7) билинейная комбинация моментов в квадратных скобках в (3.11) равна $64K_N/3\pi$ в пределе $K_N<(1+\delta)^2$, а в противоположном пределе $K_N\gg(1+\delta)^2$ она равна $4.66K_N$. Подставив K_N из (2.6), окончательно получаем первое слагаемое в уравнении (3.3) в виде

$$\tau_\alpha=A\frac{m_\alpha^4}{Rv_se_\alpha^4}\left[\sum_\beta\frac{e_\beta^2\omega_{L\beta}^2v_{T\beta}^2}{4\pi m_\beta^2}\right], \tag{3.12}$$

где $A=3\lambda/2\eta\cong 0.77$ при $K_N<(1+\delta)^2$ и $A=32\lambda/4.66\pi\eta\cong 1.12$ при $K_N\gg(1+\delta)^2$. С учетом выражений (3.7), (3.9) уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{dT_\alpha}{dt}=\frac{T_\alpha}{\tau_\alpha}+\sum_\beta\nu_{\alpha\beta}(T_\beta-T_\alpha). \tag{3.13}$$

4. Рассмотрим решение уравнения (3.13). Для простоты ограничимся случаем плазмы с двумя сортами ионов. Рассмотрим решение с начальным условием $T_1(0)=T_2(0)=T_{i0}$. Прежде всего заметим, что в начальный момент времени вклады ион-ионных столкновений в уравнение (3.13), пропорциональные разнице температур ионов, равны нулю. Следовательно, на малых временах, пока разница температур достаточно мала

$$\frac{|T_1-T_2|}{T_1}\ll\min\left[(\nu_{12}\tau_1)^{-1},\ (\nu_{21}\tau_2)^{-1}\right], \tag{4.1}$$

нагрев ионов определяется столкновениями ионов с турбулентными шумами и описывается первым слагаемым в правой части (3.13). При этом отношение скоростей нагрева ионов определяется параметром

$$\frac{dT_1}{dT_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{m_2 e_1}{m_1 e_2}\right)^4 . \tag{4.2}$$

Поэтому, если отношение зарядов к массам для обоих сортов ионов одинаково, то оба сорта ионов нагреваются с одинаковыми скоростями. При этом ион-ионные столкновения не влияют на нагрев ионов, поскольку разница температур ионов остается равной нулю на протяжении всего нагрева. Однако именно благодаря наличию частых ион-ионных столкновений распределения ионов по скоростям имеют вид (3.1). Соответствующее условие на соотношение эффективных частот столкновений имеет вид

$$\tau_\alpha^{-1} \ll \max(\nu_{\alpha 1}, \nu_{\alpha 2}). \tag{4.3}$$

Таким образом, мы видим, что в случае $e_1/m_1 = e_2/m_2$, когда оба сорта ионов нагреваются с одинаковыми скоростями, будучи изотермическими в начале нагрева они остаются изотермическими и при их нагреве, обусловленном индуцированным рассеянием турбулентных ионно-звуковых флуктуаций на ионах. При этом согласно (3.13), (4.2) уравнение, описывающее нагрев ионов, имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Rv_s}{A\kappa}(n_1 + n_2)^{-1} \tag{4.4}$$

с решением

$$T = T_{i0}\left(1 + \frac{Rv_s}{A\kappa(n_1 + n_2)}t\right). \tag{4.5}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 02–02–16047 и гранта поддержки ведущих научных школ РФ N НШ–1385.2003.2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Завойский Е. К., Рудаков Л. И. Атомная энергия, **23**, 417 (1967).

[2] Волков Е. Д., Перепелкин Н. Ф., Супруненко В. А., Сухомлин Е. А. Коллективные явления в токонесущей плазме. Киев, Наукова Думка, 1978.

[3] Кадомцев Б. Б. В сб.: Вопросы теории плазмы, **4**, Атомиздат, Москва (1964), с. 258.

[4] Петвиашвили В. И. ДАН СССР, **153**, 1295 (1963).

[5] B y c h e n k o v V. Yu., S i l i n V. P., and U r y u p i n S. A. Phys. Reports, **164**, 119 (1988).

[6] A l e x e f f I., J o n e s W. D., and M o n t g o m e r y D. Phys. Rev. Lett., **19**, 422 (1967).

[7] H i r o s e A., A l e x e f f I., and J o n e s W. D. Phys. Fluids, **13**, 1290 (1970).

[8] F r i e d B. D., W h i t e R. B., and S a m e c T. K. Phys. Fluids, **14**, 2388 (1971).

[9] P a s e c h n i k L. L. and S e m e n y u k V. F. Sov. Phys. Tech. Phys., **18**, 676 (1973).

[10] G l e d h i l l I. M. A. and H e l l b e r g M. A. J. Plasma Phys., **36**, 75 (1986).

[11] V u H. X., W a l l a c e J. M., and B e z z e r i d e s B. Phys. Plasm., **1**, 3542 (1994).

[12] W i l l i a m s E. A., B e r g e r R. L., D r a k e R. P., R u b e n c h i k A. M., et al. Phys. Plasm., **2**, 129 (1995).

[13] K u z o r a I. V., S i l i n V. P., and U r y u p i n S. A. Phys. Lett., A, **258**, 329 (1999).

[14] К у з о р а И. В., С и л и н В. П., У р ю п и н С. А. ЖЭТФ, **120**, 1194 (2001).

[15] С и л и н В. П. Введение в кинетическую теорию газов, М., Наука, 1971.

Поступила в редакцию 29 апреля 2003 г.