*Краткие сообщения по физике № 11-1988 г.*

УДК 530. 145

# О КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ЭККАРТА

А.С. Бруев

*Найдены точные выражения для квазиуровней (энергии и ширины) в случае потенциала Эккарта.*

Если для определенного временного интервала характерное время изменения числа частиц в некоторой области конфигурационного пространства много больше характерного времени изменения фазы волновой функции, то соответствующее нестационарное состояние системы может быть описано с помощью собственных решений уравнения Шредингера с комплексной энергией (квазистационарных состояний) /1/.

Однако точных решений уравнения Шредингера с комплексными собственными значениями известно мало /2, 3/. В данной работе рассмотрены квазистационарные состояния для одномерного потенциала Эккарта /4/

$$U(x) = A\exp\frac{2x}{a}\left(1+\exp\frac{2x}{a}\right)^{-1} + B\exp\frac{2x}{a}\left(1+\exp\frac{2x}{a}\right)^{-2}, \qquad (1)$$

где A,B – константы. Отметим, что $U(-\infty) = 0, U(\infty) = A$, причем в точке $x_0 = (a/2)\ln[(B+A)/(B-A)]$ при $B > A$, $B > 0$ потенциал Эккарта имеет максимум, равный $U_0 = (A+B)^2/4B$.

Потенциал Эккарта является частным случаем потенциалов, для которых уравнение Шредингера разрешимо в классе гипергеометрических функций /5/. Переходя к безразмерной переменной $\xi = \exp(-2x/a)$, получаем

$$\xi^2\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \xi\frac{d\Psi}{d\xi} + \left[\bar{E} - \frac{\bar{A}}{1+\xi} - \frac{\bar{B}\xi}{(1+\xi)^2}\right]\Psi = 0, \qquad (2)$$

где $\bar{G} \equiv \bar{A}, \bar{B}, \bar{E}$ – безразмерные величины, причем $\bar{G} = Gma^2/2\hbar^2$, m – масса частицы, $\hbar$ – постоянная Планка. Для потенциала (1) асимптотика решения при $x \to \infty$ имеет вид $\Psi(x) \propto \exp(i2x\sqrt{\bar{E}-\bar{A}}/a)$. Соответственно решение уравнения (2) ищем в виде $\Psi(\xi) = \xi^{-i\sqrt{\bar{E}-\bar{A}}}u(\xi)$, причем уравнение для функции $u(\xi)$ совпадает с известным P-уравнением Римана /6/

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (1 - 2i\sqrt{\bar{E}-\bar{A}})\xi^{-1}\frac{du}{d\xi} + \left(\bar{A} - \frac{\bar{B}}{1+\xi}\right)\xi^{-1}(1+\xi)^{-1}u = 0. \qquad (3)$$

Переход от уравнения (3) к гипергеометрическому уравнению осуществляется с помощью подстановки $u(\xi) = (1+\xi)^{1/2+\sqrt{1/4-\bar{B}}}y(\xi)$. При этом

$$y(\xi) = F(a, b, c - \xi), \qquad (4)$$

где $F(a, b, c, -\xi)$ – гипергеометрическая функция, $|\xi| \leqslant 1$, $a = 1/2 + \sqrt{1/4-\bar{B}} - i\sqrt{\bar{E}-\bar{A}} - i\sqrt{\bar{E}}$, $b = 1/2 + \sqrt{1/4-\bar{B}} - i\sqrt{\bar{E}-\bar{A}} + i\sqrt{\bar{E}}$, $c = 1 - 2i\sqrt{\bar{E}-\bar{A}}$. Решение при $|\xi| > 1$ можно найти, используя формулу аналитического продолжения гипергеометрической функции

$$
\begin{aligned}
F(a, b, c, -\xi) = {} & \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}\,\xi^{-a} F(a, a+1-c, a+1-b, -\xi^{-1}) + \\
& + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\,\xi^{-b} F(b, b+1-c, b+1-a, -\xi^{-1}),
\end{aligned} \tag{5}
$$

где $\Gamma(x)$ – Г-функция.

С помощью (5) находим асимптотику решения при $x \to -\infty$:

$$
\Psi(x) \propto \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\ \exp(-i\frac{2x}{a}\sqrt{E}) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\ \exp(i\frac{2x}{a}\sqrt{E}). \tag{6}
$$

Выбирая нормировку функции $\Psi(x)$ так, чтобы амплитуда падающей волны равнялась единице, с помощью (6) для коэффициентов прохождения (T) и отражения (R) имеем:

$$
T(E) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(a-b)},\quad R(E) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(a-b)}\ .
$$

При значениях энергии, удовлетворяющих условию a, $c - b = -N$, $N = 0, 1 \ldots$, амплитуды прохождения и отражения имеют простые полюса, соответствующие квазисвязанным состояниям. Используя (4), для определения энергий квазисвязанных состояний $E_N$ находим следующее уравнение: $i(\sqrt{\bar{E}_N - \bar{A}} + \sqrt{\bar{E}_N}) = N + 1/2 \pm i\sqrt{\bar{B} - 1/4}$, откуда получаем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\bar{E}_N &= (1/4)\,[\bar{B} - 1/2 - N(N+1) + 2\bar{A} + A^{-2}(\bar{B} - 1/2 - N(N+1)/[\bar{B} + N(N+1)]^2], \\
\mathrm{Im}\bar{E}_N &= \pm(1/2)\sqrt{\bar{B} - 1/4}\,(N + 1/2)\,[1 - A^{-2}/(\bar{B} + N(N+1))^2]\ .
\end{aligned} \tag{7}
$$

При $\bar{A} = 0$ выражения (7) совпадают с аналогичными формулами работы /3/.

При $B > A > 0$ физические условия, соответствующие найденным квазистационарным состояниям, реализуются при изменении числа частиц в классически запрещенной области под барьером. Действительно, выбирая нормировку волновой функции так, чтобы в прошедшей волне $T(E) = 1$, получаем, что при a, $c - b = -N$ второй член в (8) отсутствует. Поэтому требование, чтобы при $x \to \pm\infty$ существовали лишь расходящиеся или сходящиеся к барьеру волны, отбирает дискретные комплексные значения E, отвечающие квазистационарным состояниям. Гипергеометрическая функция F (a, b, c, z) при $a = -N$ сводится к полиному и, следовательно, можно получить явный вид некоторых первых $\Psi_N(x)$. В частности, при $N = 0, 1$, $\bar{A} = 0$, $T(E) = 1$ находим

$$
\Psi_0(x) = [\exp(x/a) + \exp(-x/a)]^{1/2 + i\sqrt{\bar{B} - 1/4}};\quad \Psi_1(x) = \Psi_0(x)\,[1 - \exp(-2x/a)]\,.
$$

Подобно волновым функциям связанных состояний распределение плотности $|\Psi_0(x)|^2$ не имеет нулей, а распределение плотности $|\Psi_1(x)|^2$ имеет один нуль в области под барьером.

Можно сравнить свойства найденных квазистационарных состояний со свойствами квазистационарных состояний для сферически симметричного трехмерного прямоугольного барьера $U(r) = U_0$, $r < a$ при нулевом орбитальном моменте, изученным в /7/ численно. В частности, для прямоугольного барьера квазистационарные состояния $E_N$ являются надбарьерными: $\mathrm{Re}\,\bar{E}_N > \bar{U}_0$, причем при $\hbar \to 0$ $\mathrm{Im}\bar{E}_N \to 0$ в соответствии с классическим поведением. Напротив, для данного случая квазистационарные состояния являются подбарьерными:

$$\bar{U}_0 - \mathrm{Re}\,\bar{E}_N = 1/8 + N(N+1) + \bar{A}^2\,[3\bar{B}N(N+1) + \bar{B}/2 + N^2(N+1)^2]/4\bar{B}\,(\bar{B} + N(N+1))^2,$$

а $\mathrm{Im}\bar{E}_N$ от $\hbar$ не зависит. Последнее свойство не является противоречивым, поскольку при $\hbar \to 0$ стремится к нулю плотность подбарьерных частиц.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971, с. 308.
2. Doolen G. D. Int. Journ. Quant. Chem., **14**, 523 (1978).
3. Ginocchio J. H. Ann. Phys., **152**, 203 (1984).
4. Eckart C. Phys. Rev., **35**, 1303 (1930).
5. Натанзон Г. А. Вестник ЛГУ, № 10, 22 (1971); Теор. мат. физ., **38**, 219 (1979).
6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ГИФМЛ, М., 1963, т. 1, с. 293.
7. Nussenzveig H. M. Nucl. Phys., **11**, 499 (1959).


Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 24 мая 1988 г.