Краткие сообщения по физике № 12-1988 г.

УДК 537. 214

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА И ТОКИ В ЦЕПЯХ ЭЛЕКТРОДОВ, ОКРУЖАЮЩИХ ПОДВИЖНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЗАРЯД

В.С. Ковалев

Рассмотрена связь между уравнением энергетического баланса в системе объединенных внешней сетью произвольных проводящих электродов, окружающих подвижной пространственный заряд, и токами в их нагрузках.

Энергетический баланс в системе n произвольных, объединенных внешней сетью проводящих электродов, заключающих в пространстве единичный точечный заряд, рассмотрен в работе /1/, где отмечалась важная роль реакции нагрузки. В данной работе рассматривается как этот эффект позволяет связать движение произвольного пространственного заряда с энергетическими процессами во внешней сети.

Возьмем за основу уравнения, полученные в /2/,

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k = \int (\rho v + dE/dt)\, E_1\, dV, \quad 0 = \int E_1 E_2\, dV, \tag{1}$$

где Φ_k – потенциалы на электродах; i_k – внешние токи электродов; ρ и v – плотность и скорость распределенного в объеме V между электродами пространственного заряда; E – напряженность электрического поля в пространстве между электродами; E_1 – компонента электрического поля, связанная с емкостными зарядами Q_{1k} на электродах, обусловленными приложенными потенциалами Φ_k; E_2 – компонента электрического поля, обусловленная пространственным зарядом и индуцированными зарядами Q_{2k} на электродах.

Соотношения (1) являются выражениями частных энергетических балансов и компонентами более общего выражения, полученного в /2/·

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k = \int \rho v E\, dV + \epsilon \int E\, (dE/dt)\, dV. \tag{2}$$

Редукцию соотношения (2), приведенного в /2/ к форме (1), можно продолжить, рассмотрев энергию поля E_1. С учетом $E_1 = -\nabla\varphi_1$, $\operatorname{div}(dE_1/dt) = 0$, векторного соотношения $\operatorname{div}(\varphi_1 dE_1/dt) = \varphi_1 \operatorname{div}(dE_1/dt) + (dE_1/dt)\nabla\varphi_1$ и условий на электродах $\varphi_1 \int (dE_1/dt)\, dS_k = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k dQ_k/dt$ можно получить

$$\epsilon \int E_1\, (dE_1/dt)\, dV = \int \varphi_1 \operatorname{div}(dE_1/dt)\, dV - \int \operatorname{div}\varphi_1\, (dE_1/dt)\, dV = -\int \varphi_1\, (dE_1/dt)\, dS_k = \sum_{k=1}^{n} (dQ_{1k}/dt)\, \Phi_k$$

и, в соответствии с (1), $0 = \epsilon \int (dE_2/dt)\, E_1\, dV$. Подстановка приведенных выше соотношений в (1) дает более конкретную форму энергетического баланса

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k = \int \rho v E_1\, dV + \sum_{k=1}^{n} (dQ_{1k}/dt)\, \Phi_k, \tag{3}$$

согласно которой энергия, полученная системой электродов из внешней сети, расходуется на перемещение пространственного заряда и перезарядку межэлектродных емкостей. Если заряд движется встречно к результирующему вектору поля $\mathbb{E}_1$, то источником энергии для протекающих процессов является кинетическая энергия пространственного заряда.

В форме (3) движение пространственного заряда может быть связано с уравнениями Кирхгофа для внешней сети; связующими элементами являются мощность в левой части и реакция нагрузки во втором члене правой части (3). Чтобы рассмотреть каждый электрод в отдельности, представим (3) как суперпозицию уравнений

$$\Phi_k i_k = \int \rho v \mathbb{E}_{1k} dV + \Phi_k dQ_{1k}/dt, \quad k = 1 \ldots n, \tag{4}$$

каждое из которых может быть разделено на Φ_k и умножено на импеданс нагрузки Z_k. Выразив емкостные заряды на электродах Q_{1k} через коэффициенты индукции C_{ki} в виде $dQ_{1k}/dt = \sum_{i=1}^{n} C_{ki} d\Phi_i/dt$, после суммирования частных условий (4) и группировки коэффициентов при $d\Phi_k/dt$ можно прийти к новому выражению энергетического баланса в системе:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k Z_k = \int \rho v \left[\sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}_{1k}/\Phi_k) Z_k\right] dV + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki} Z_i\right) d\Phi_k/dt.$$

Эта сумма снова может быть разложена на составляющие:

$$i_k Z_k = Z_k \int \rho v (\mathbb{E}_{1k}/\Phi_k) dV + (d\Phi_k/dt) \sum_{i=1}^{n} C_{ki} Z_i, \quad k = 1 \ldots n. \tag{5}$$

Укажем потенциал Φ_0 той точки в системе, относительно которой рассматриваются импедансы Z_k, и введем внешние источники $E_{0k} + E_k(t)$, так что $\Phi_0 + E_{0k} + E_k(t) = i_k Z_k + \Phi_k$. Тогда с учетом (5) в операторной форме можно записать:

$$\Phi_k(p) = \Phi_0 + E_{0k} + E_k(p) - i_k(0) Z_k(p) - J_k(p) Z_k(p) - p\left[\sum_{i=1}^{n} C_{ki} Z_i(p)\right] [\Phi_k(p) - \Phi_k(0)], \; k = 1 \ldots n. \tag{6}$$

Здесь $i_k(0)$ – постоянная составляющая пространственного тока и одновременно начальное значение внешнего тока электрода, так что $\Phi_k(0) + i_k(0) Z_k(p) = \Phi_0 + E_{0k} + E_k(0)$. В текущем значении пространственного тока $J_k(p) = \int [\rho(p) v(p)/\mathbb{L}_k(x, y, z)] dV$ множитель $1/\mathbb{L}_k(x, y, z) = \mathbb{E}_{1k}/\Phi_k$ представляет один из n геометрических параметров, связанных с распределением $\mathbb{E}_1$ компонент поля емкостных зарядов на электродах.

Из (6) следует изображение напряжения на k-ом электроде

$$\Phi_k(p) - \Phi_k(0) = [E_k(p) - E_k(0) - J_k(p) Z_k(p)] / [1 + p\sum_{i=1}^{n} C_{ki} Z_i(p)], \quad k = 1 \ldots n,$$

а в случае двухэлектродной системы и отсутствия внешнего источника переменного напряжения операторные напряжение и ток в нагрузке составляют

$$U(p) = \Phi(p) - \Phi(0) = -J(p) Z(p) / [1 + pCZ(p)], \; i(p) = J(p) / [1 + pCZ(p)]. \tag{7}$$

Если $U(p)$ в (7) в случае активной нагрузки перевести в пространство оригиналов, то получится известное /3/ соотношение $U + RCdU/dt = JR$, принятое в теории ионизационных камер и обсужденное с позиций рассматриваемой теории в /4/.

Как следует из (7), внешний ток отличается от пространственного, и отличие тем больше, чем выше импеданс нагрузки. Это можно рассмотреть на примере экспоненциального пространственного тока $J(p) =$

$= J_0 p/(p + \alpha) = J_0 e^{-\alpha t}$, протекающего в двухэлектродной системе с активной нагрузкой R. Согласно (7) и правилам операторного метода, $i(t) = J_0 (e^{-t/RC} - e^{-\alpha t})/(\alpha RC - 1)$, а амплитуда этого тока по отношению к значению J_0 составляет $b^{b/(1-b)}$, где $b = \alpha RC$. Как видно из примера, отношение прогрессивно падает с ростом R.

Таким образом, полученные соотношения, в отличие от известных, позволяют рассматривать системы с пространственным зарядом и произвольным числом электродов, нагруженные комплексными нагрузками; при этом математический аппарат операторного метода может быть использован для задач, касающихся поведения пространственного заряда под действием вынуждающей силы и анализа сигналов во внешних цепях систем по примеру, рассмотренному в /5/.

Автор благодарен Б.М. Болотовскому за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В.С. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, 3 (1988).
2. Jen C.K. Proc. I.R.E., 29, 345 (1941).
3. Росси Б., Штауб Г. Ионизационные камеры и счетчики. М., изд. Иностр. лит., 1951, с. 39–42.
4. Ковалев В.С. Препринт ФИАН № 110, М., 1987.
5. Ковалев В.С. Препринт ФИАН № 234, М., 1987.

Поступила в редакцию 31 марта 1988 г.