Краткие сообщения по физике № 12-1988 г.

УДК 533.9

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОТНЫХ ПУЧКАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

М.В. Кузелев, В.А. Панин, А.П. Плотников, А.А. Рухадзе

Исследована нелинейная стабилизация трехволновых процессов в системах с плотными релятивистскими прямолинейными пучками. Методом разложения материальных уравнений по возмущениям траекторий и импульсов электронов получены аналитические решения для амплитуд взаимодействующих волн и времени насыщения неустойчивостей. Рассмотрены распад с повышением частоты и взрывной процесс.

Нелинейная теория рассеяния электромагнитных волн на плотных нерелятивистских электронных пучках разработана в работах /1–4/. Системы с релятивистскими пучками рассмотрены в /5, 6/. Показано, что существенное влияние на стабилизацию пучковых неустойчивостей, связанных с рассеянием, оказывают собственные поля пучка, возникающие при его модуляции по плотности. Однако этот эффект играет принципиальную роль только в очень плотных пучках. Неустойчивости, развивающиеся в условиях рамановского распада, стабилизируются либо вследствие захвата электронов полем волны плотности заряда /7/, либо из-за нелинейного сдвига частот /1, 2/. Последний механизм связан как с торможением электронного пучка в среднем, так и с генерацией высших гармоник плотности заряда /8, 9/. Математически оба процесса описываются эквивалентно и соответствуют учету кубических нелинейностей в разложении нелинейных уравнений по степеням амплитуд поля. Соответствующий метод разложения по траекториям разработан в /8/ и использован для анализа нелинейной динамики в нерелятивистских пучковых системах.

Рассмотрим взаимодействие двух электромагнитных квазипоперечных волн с частотами ω_1, ω_2 и продольными волновыми числами k_1, k_2 и релятивистского прямолинейного замагниченного пучка. В условиях рамановского распада, когда характерное время развития неустойчивости t_0 намного превышает обратную плазменную частоту электронов пучка Ω_b, комбинационная волна с $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$ и $k_0 = k_1 - k_2$ рассеивается на колебаниях плотности пучка. Условие резонанса комбинационной волны с медленной волной плотности заряда, когда возможна эффективная перекачка кинетической энергии электронов в энергию излучения, имеет вид $\eta_0 \equiv (\omega_0 - k_0 u)/\Omega_b = -1$, где u – скорость невозмущенного пучка. Нелинейная система релятивистских уравнений для таких процессов при наличии сильного продольного магнитного поля, затрудняющего поперечное движение электронов, запишется в виде /10/:

$$
\begin{gathered}
d\epsilon_1/d\tau = -\nu\epsilon_2\tilde{\rho}\,e^{i\eta_0\tau},\ \ d\epsilon_2/d\tau = \sigma\nu\epsilon_1\tilde{\rho}^{*}e^{-i\eta_0\tau},\ \ dy/d\tau = (p^2-1)/\mu p^2,\\
dp/d\tau = -\frac{i}{4}\,\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\,(\rho_n e^{iny} - \text{к.с.}) + \frac{\nu\mu}{4p^3}\,(\epsilon_1\epsilon_2^{*}\,e^{iy - i\eta_0\tau} + \text{к.с.}),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\rho_n = (1/\pi)\int_0^{2\pi} e^{-iny}\,dy_0$; $\tilde{\rho} = (1/\pi)\int_0^{2\pi} p^{-3}\ e^{-iy}\,dy_0$; $\tau = |\Omega_b|t$; $y = k_0 z$; z – координата электрона вдоль направления распространения; p – импульс электрона; ϵ_1 и ϵ_2 – безразмерные амплитуды взаимодействующих волн; a_n – коэффициенты, определяемые геометрией системы /6/; ν – параметр, обратно пропорциональный плотности пучка; $\mu = 2\gamma_0^2(u/c)(\Omega_b/k_0c)$ – параметр релятивизма; $\gamma_0 = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Смысл амплитуд ϵ_1 и ϵ_2 поясняется следующей формулой для эффективности излучения:

$$
\text{КПД} = (\mu/8)\,(|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_{10}|^2) = -\sigma(\mu/8)\,(|\epsilon_2|^2 - |\epsilon_{20}|^2).
$$

При $\mu = 0$ система (1) переходит в нерелятивистские уравнения, исследованные в /2/. Величина σ, входящая в (1), определяет тип трехволнового процесса: при $\sigma = 1$, $\eta_0 = -1$ реализуется распад с повышением частоты, при $\sigma = -1$, $\eta_0 = -1$ – взрывной процесс.

Представим координату и импульс электрона в виде

$$y(y_0,\tau) = y_0 + W(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}(b_s(\tau)e^{isy_0} + \text{к.с.}),$$
$$p(y_0,\tau) = \langle p\rangle + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m(\tau)e^{imy_0} + \text{к.с.}). \qquad (2)$$

Здесь $W(\tau)$ – смещение электрона в среднем, $\langle p\rangle$ – его средний импульс, b_s и a_m – амплитуды осцилляций соответственно координаты и импульса в поле комбинационной волны. Считаем в дальнейшем, что выполнено неравенство $\nu \ll 1$, которое, как показано в /2/, эквивалентно условию рамановского рассеяния $t_0 \gg \Omega_b^{-1}$. При выполнении последнего неравенства в уравнениях (1) с учетом разложения (2) следует ограничиться удержанием только кубических нелинейностей. Для нерелятивистских пучков, когда существенно только первое разложение в (2), последнее утверждение обосновано в /8/. Подставляя (2) в (1) и отбрасывая нелинейности с порядком выше третьего, получим следующую систему уравнений:

$$d\epsilon_1/d\tau = -\nu\epsilon_2\widetilde{\rho}\,e^{i\eta_0\tau},\quad d\epsilon_2/d\tau = \sigma\nu\epsilon_1\widetilde{\rho}^*e^{-i\eta_0\tau},$$
$$\frac{da_1}{d\tau} = \frac{\mu}{2}\,[-b_1 + (1-\alpha_2)\,(ib_1^*b_2 + \frac{1}{2}|b_1|^2b_1)] + \frac{\nu\mu}{2}\,\epsilon_1\epsilon_2^*\,e^{iW-i\eta_0\tau},$$
$$\frac{da_2}{d\tau} = \frac{\mu}{2}\,[-\alpha_2b_2 + \frac{i}{2}\,(\alpha_2-1)\,b_1^2]. \qquad (3)$$
$$\frac{db_1}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\,[2a_1 + \frac{3}{4}\,\mu(|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_{1\,0}|^2)\,a_1 - 3a_1^*a_2 + 3a_1|a_1|^2],$$
$$db_2/d\tau = \frac{1}{\mu}(2a_2 - \frac{3}{2}\,a_1^2),\quad dW/d\tau = -\frac{1}{4}\,(|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_{1\,0}|^2) - \frac{3}{2}\,\mu|a_1|^2,$$

причем $\widetilde{\rho} = (3a_1 + ib_1)\,e^{-iW}$. Поскольку $\tau = |\Omega_b|t$, то коэффициент $\alpha_1 \equiv 1$.

Считаем, что $a_1 = \widetilde{a}_1(\tau)e^{i(\tau + W)}$, $a_2 = \widetilde{a}_2(\tau)e^{2i(\tau + W)}$, $b_1 = \widetilde{b}_1(\tau)e^{i(\tau + W)}$, $b_2 = \widetilde{b}_2(\tau)e^{2i(\tau + W)}$, где $\widetilde{a}_1(\tau)$, $\widetilde{a}_2(\tau)$, $\widetilde{b}_1(\tau)$ и $\widetilde{b}_2(\tau)$ – медленно меняющиеся функции времени, а расстройка $\eta_0 = -1$. Такой подход в условиях рамановского рассеяния оправдан /9/. В результате система уравнений (3) запишется в более простом виде:

$$d\epsilon_1/d\tau = i\nu\epsilon_2\,(1 + \frac{3}{2}\,\mu)\,\widetilde{b}_1,\quad d\epsilon_2/d\tau = i\sigma\nu\epsilon_1\,(1 + \frac{3}{2}\,\mu)\,\widetilde{b}_1^*,\ d\widetilde{b}_1/d\tau + i\Delta\widetilde{b}_1 = -i\,\frac{\nu}{2}\,\epsilon_1\epsilon_2^*,$$
$$\Delta = -\frac{1}{4}\,[(1 + \frac{3}{4}\,\mu)(|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_{1\,0}|^2) + \frac{3}{2}\,\mu(1 + \frac{\mu}{8}\,\frac{16-\alpha_2}{4-\alpha_2})\,|\widetilde{b}|^2]. \qquad (4)$$

В уравнениях (4) исключается из рассмотрения случай резонансного возбуждения второй гармоники плотности заряда пучка при $\alpha_2 = 4$, который требует отдельного анализа /8/.

Система (4) с помощью двух первых интегралов энергии и одного фазового интеграла сводится к одному уравнению для величины $X = |\widetilde{b}_1|^2$, решение которого выражается через эллиптические функции:

$$X = |\epsilon_{20}|^2 \, \mathrm{cn}^2(y, r)/(1 + 3\mu/2)\,[Q(1 + \mathrm{sn}^2(y, r)) + \sigma\,\mathrm{cn}^2(y, r)], \tag{5}$$

где

$$Q = [1 + |\epsilon_{20}|^2 (1 + 3\mu + \mu^2\lambda)^2/32\nu^2 (1 + 3\mu/2)^3]^{1/2},$$

$$\lambda = 3(64 - 13a_2)/32(4 - a_2), \quad r = 1 - |\epsilon_{10}|^2 Q/2|\epsilon_{20}|^2, \quad y = (1/\sqrt{2})\,\nu|\epsilon_{20}|\sqrt{1+3\mu/2}\,(\tau_0 - \tau), \tag{6}$$

а время насыщения неустойчивостей (напомним, что речь идет о распаде с повышением частоты и взрывном процессе) определяется выражением

$$\tau_0 = (\sqrt{2}/\nu|\epsilon_{20}|\sqrt{1 + 3\mu/2})\ln(4Q^{-1/2}|\epsilon_{20}|/|\epsilon_{10}|). \tag{7}$$

При получении формул (5) – (7) предполагалось, что $|\epsilon_{20}| \gg |\epsilon_{10}|$, где $|\epsilon_{10}|$ – начальная амплитуда сигнальной волны, $|\epsilon_{20}|$ – начальная амплитуда волны накачки. При этом эффективность электромагнитного излучения в рассматриваемой системе запишется в виде:

$$(\text{КПД})_{\max} = (\mu/4)\,|\epsilon_{20}|^2/(\sigma + Q).$$

Приведем также решение для взрывного процесса ($\sigma = -1$) в случае адиабатического включения поля, когда $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = 0$:

$$X = \nu^{-2}(1 + 3\mu/2)^{-2}[\tau^2 + (1 + 3\mu + \mu^2\lambda)^2/64\nu^2(1 + 3\mu/2)^4]^{-1}; \tag{8}$$

$$(\text{КПД})_{\max} = 16\mu(1 + 3\mu/2)^3/(1 + 3\mu + \mu^2\lambda)^2.$$

Приведенные решения (5), (8) при $\mu = 0$ соответствуют результатам для нерелятивистских пучков /2,9/.

Таким образом, в системах с плотными релятивистскими электронными пучками нелинейная стабилизация трехволновых неустойчивостей обусловлена эффектом нелинейного сдвига частоты. В дополнение к имеющимся в нерелятивистских пучках процессам торможения и генерации высших гармоник плотности здесь добавляется релятивистская зависимость частоты плазменных колебаний электронов от их амплитуды с соответствующими кубическими нелинейностями $\propto \mu$ и μ^2 в уравнениях (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М., Энергоиздат, 1981.
2. Кузелев М.В., Панин В.А. Изв. ВУЗов, сер. Радиофизика, **27**, 426 (1984).
3. Литвак А.Г., Петрухина В.И., Трахтенгерц В.Ю. Письма в ЖЭТФ, **18**, 190 (1973).
4. Балакирев В.А. Изв. ВУЗов, сер. Радиофизика, **25**, 1198 (1982).
5. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И. ЖЭТФ, **76**, 930 (1979).
6. Огнивенко В.В. Радиотехника и электроника, 27, 1818 (1982).
7. Кузелев М.В. ЖТФ, **53**, 1029 (1983).
8. Кузелев М.В. и др. ЖЭТФ, **91**, 1620 (1986).
9. Кузелев М.В. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 27 (1987).
10. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Санадзе Г.В. ЖЭТФ, **89**, 1591 (1985).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 22 июня 1988 г.