Краткие сообщения по физике № 12-1988 г.

УДК 530.145

О КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Т.И. Маглаперидзе, А.Г. Ушверидзе

Показано, что точнонерешаемые модели квантовой механики эквивалентны классическим моделям кулоновской жидкости.

В работах /1, 2/ было показано, что квазиточнорешаемые (КТР) модели допускают формулировку на языке электростатики. Например, КТР модель третьего рода /3/ с потенциалом

$$V(x) = [\beta^2 - 2\gamma(M + \delta + 1/2)]x^2 + \beta\gamma x^4 + \gamma^2 x^6/4, \quad x \in [0, \infty],$$

в которой $\delta > 1/2$, $\gamma > 0$, имеет следующие решения:

$$\varphi(x) \sim \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\lambda_i}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\delta} \exp\left(-\beta\frac{x^2}{2} - \gamma\frac{x^4}{8}\right), \quad E = 4\delta\left(\beta + \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\right), \tag{1}$$

где λ_i, $i = 1, \ldots, M$ – числа, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} + \frac{\beta}{\lambda_i^2} + \frac{\gamma}{\lambda_i^3} - \frac{M + \delta - 1}{\lambda_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{2}$$

Эту систему можно рассматривать как условие равновесия M заряженных частиц с координатами λ_i, движущихся в потенциале $U = \sum_{i<k} Q(\lambda_i - \lambda_k) + \sum_i P(\lambda_i)$, где $Q(\lambda) = -\ln|\lambda|$, а $P(\lambda) = (1/2)\gamma\lambda^{-2} + \beta\lambda^{-1} + (M + \delta - 1)\ln|\lambda|$. Внешний потенциал $P(\lambda)$ представляет собой две ямы, разделенные сингулярным в нуле барьером. Каждому распределению частиц между двумя ямами (например, K частиц в правой яме, а M–K – в левой) соответствует некоторое положение их устойчивого равновесия, отвечающее решению уравнений (2). Поскольку число неэквивалентных распределений частиц по ямам равно M + 1 (K = 0, ...,M), то уравнения (2), а значит, и уравнение Шредингера имеют M + 1 различных решений, соответствующих основному и первым M возбужденным состояниям (согласно осцилляционной теореме). Положения частиц в правой (левой) ямах определяют физические (нефизические) нули волновой функции.

В пределе $M \to \infty$ уравнение (2) бесконечно усложняется и возникает точнонерешаемая модель. Конечность потенциала этой модели обеспечивается зависимостью β и γ от M. Определив ее из условий $\beta^2 - 2\gamma = g$, $2\gamma\beta = 1$, находим, что $\beta \approx M^{1/3}$, $\gamma \approx M^{-1/3}/2$. Поэтому потенциал предельной модели имеет вид:

$$V(x) = \left(2\delta - \frac{1}{2}\right)\left(2\delta - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{x^2} + gx^2 + \frac{1}{2}x^4. \tag{3}$$

Спектральная задача для точнонерешаемого потенциала (3) по-прежнему может быть сформулирована на классическом языке. Совершив в (1) и (2) замену $\beta = bM^{1/3}$, $\gamma = cM^{-1/3}$, $\lambda_i = \xi_i M^{-2/3}$, находим:

$$E = 4\delta M^{1/3}\,[1 + \sum_{i=1}^{M} \xi_i/M],$$

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\xi_i - \xi_k}\,\frac{1}{M} + \frac{b}{\xi_i^2} + \frac{1}{2}\,\frac{c}{\xi_i^3} - (1 + \frac{\delta - 1}{M})\,\frac{1}{\xi_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{4}$$

Вводя плотности распределения частиц $\rho(\xi)$, получаем в пределе $M \to \infty$ (в главном приближении):

$$E = 4\delta M^{1/3} e, \quad e = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \xi\rho(\xi)d\xi, \tag{5}$$

где $\rho(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta}\,d\eta + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)d\xi = 1. \tag{6}$$

Это уравнение по-существу является уравнением равновесия заряженной жидкости (с полным зарядом 1), разлитой по двум разделенным ямам. Заряд $Q = K/M$ жидкости в правой яме определяет номер уровня энергии, а центр тяжести жидкости – его величину. Очевидно, что в случае конечных возбуждений в модели (3) заряд жидкости в правой яме (в главном приближении) равен нулю. Тогда решение уравнения (6) имеет вид:

$$\rho(\xi) = (2/\pi)(-\xi)^{-3}(1 + 4\xi)^{1/2}, \quad -\infty < \xi < -1/4; \quad \rho(\xi) = 0, \quad \xi > -1/4. \tag{7}$$

Формула (7) позволяет найти распределение нефизических нулей волновой функции $x_i \sim i^{1/3}$, согласующееся с квазиклассическим результатом. Подстановка (7) в (5) дает $e = 0$, что согласуется с конечностью уровней энергии в модели (3). Учет поправок к решению (7), получающихся при итерации уравнения (4) по малым (при $M \to \infty$) отклонениям этого уравнения от его предельного варианта (6), позволяет показать, что $e \sim M^{-2/3}$, что приводит к конечному выражению для уровней энергии, совпадающему при $K \gg 1$ с квазиклассическим ответом. При $K \gtrsim 1$ поправки не образуют убывающего ряда (следствие точной нерешаемости модели (3)).

Можно показать, что среди КТР моделей третьего рода только рациональные и тригонометрические допускают сведение к устойчивым точнонерешаемым моделям.

Описанная выше процедура сведения КТР моделей к точнонерешаемым возможна не только для моделей третьего рода, но и для моделей четвертого и более высоких родов. В качестве примера рассмотрим рациональную КТР модель четвертого рода с потенциалом:

$$V(x) = (2\delta - 1/2)(2\delta - 3/4)x^{-2} - [2\beta(M + \delta + 1/2) - a^2 + 2\gamma \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{-1}]x^2 +$$

$$+ [\gamma(M + \delta + 1) - a\beta]x^4 + (1/4)(\beta^2 + 2a\gamma)x^6 + (1/4)\beta\gamma x^8 + (1/16)\gamma^2 x^{10},$$

$$x \in [0, \infty],$$

имеющую решения:

$$E = 4\delta\,(a + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i),$$

где λ_i – числа, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^{M} (\lambda_i - \lambda_k)^{-1} + \gamma\lambda_i^{-4} + \beta\lambda_i^{-3} + a\lambda_i^{-2} - (M - 1 + \delta)\lambda_i = 0.$$

Отличие этои модели от рассмотренной выше состоит в том, что потенциал ее зависит от вида решения. Тем не менее, в пределе $M \to \infty$ можно так подобрать зависимость параметров a, β, γ от M, что зависимость потенциала от вида решения станет исчезающе малой. Указанная зависимость находится из уравнений $\beta^2 + 2a\gamma = 4$, $\gamma M - a\beta = B$, $2\beta M - a^2 + 2\gamma \sum_i \lambda_i^{-1} = A$. Возникающая в пределе $M \to \infty$ точнонерешаемая модель имеет вид $V(x) = Ax^2 + Bx^4 + x^6 + (2\delta - 1/2)(2\delta - 3/2)x^{-2}$. Если совершить замену $\beta = b$, $\gamma = gM^{-1/2}$, $a = aM^{1/2}$, $\lambda_i = \xi_i M^{-1/2}$ и ввести плотность распределения частиц $\rho(\xi)$, то в пределе $M \to \infty$ (в главном приближении) возникает система уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\eta)d\eta}{\xi - \eta} + \frac{g}{\xi^4} + \frac{b}{\xi^3} + \frac{a}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)d\xi = 1,$$

$$b^2 + 2ag = 4, \quad g = ab, \quad 2b + 2g \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-1}\rho(\xi)\,d\xi = a^2,$$

которая, как и в предыдущем случае, может быть решена явно. В случае $K \gg 1$ учет поправок к найденному решению позволяет получить как для уровней энергии, так и для распределения узлов волновых функций ответы, совпадающие с квазиклассическими.

Аналогичным образом можно показать, что модели с четными полиномиальными потенциалами степени 2n могут быть получены как предельные случаи КТР моделей n + 1-го рода. Это же относится к моделям с тригонометрическими и некоторыми другими потенциалами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 12 (1988).
3. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 134, М., 1988.

Поступила в редакцию 13 июля 1988 г.