Краткие сообщения по физике № 2-1989 г.

УДК 621. 386

О ДЛИННОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКЕ АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

А.В. Виноградов, О.И. Толстихин

Обсуждается регулярная процедура, позволяющая получать амплитуду упругого рассеяния в виде ряда по степеням отношения радиуса действия потенциала к длине волны налетающей частицы.

Рассеяние частицы с энергией E на потенциале $V(\mathbf{r})$ описывается стационарным уравнением Шредингера ($\hbar = m = 1$):

$$[-\Delta + U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = k^2\Psi(\mathbf{r}), \tag{1}$$

$$\Psi(\mathbf{r})\big|_{r\to\infty} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\mathbf{n}, \mathbf{k})\, e^{ikr}/r. \tag{2}$$

Здесь $U(\mathbf{r}) = 2V(\mathbf{r})$, $E = k^2/2$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Интегральное уравнение для функции $\Psi(\mathbf{r})$, эквивалентное задаче (1), (2), а также точное выражение для амплитуды рассеяния $f(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ через $\Psi(\mathbf{r})$ можно записать в виде /1/:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - (4\pi)^{-1}\int (e^{ikR}/R)\,U\Psi\, d\mathbf{r}'; \; R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \tag{3}$$

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = (4\pi)^{-1}\int e^{-ik\mathbf{n}\mathbf{r}'}\,U\Psi\, d\mathbf{r}'. \tag{4}$$

Пусть потенциал $U(\mathbf{r})$ заметно отличен от нуля лишь в области $r \lesssim a$ и достаточно быстро спадает при $r \to \infty$. Основная идея данной работы состоит в том, что при выполнении условия $ka \ll 1$, т. е. при длине волны налетающей частицы много больше размеров области действия потенциала, существует регулярная процедура, позволяющая определять амплитуду рассеяния в виде ряда по степеням параметра ka, решая при этом вместо уравнения (1) некоторые другие. Из выражения (4) видно, что для определения амплитуды рассеяния достаточно знать волновую функцию частицы лишь в области действия потенциала $r \lesssim a \ll 1/k$*. Из уравнения (3) следует, что при $ka \ll 1$ в области $r \ll 1/k$ величины $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и e^{ikR} в (3) можно разложить в ряд по степеням k, а функцию Ψ при этом искать в виде асимптотического разложения:

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^n \Psi_n(\mathbf{r}), \; r \ll 1/k. \tag{5}$$

Подставляя ряд (5) в уравнение (3) и собирая члены при одинаковых степенях k, получим последовательность интегральных уравнений для определения функций $\Psi_n(\mathbf{r})$

$$\begin{gathered}\Psi_n(\mathbf{r}) = a_n(\mathbf{r}) - (4\pi)^{-1}\int \frac{U\Psi_n}{R}\, d\mathbf{r}'; \; n = 0, 1, 2 \ldots, \\ a_n(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{n}_0\mathbf{r})^n}{n!} - (4\pi)^{-1}\sum_{n'=0}^{n-1}\int \frac{R^{n-n'-1}}{(n-n')!}\, U\Psi_{n'}\, d\mathbf{r}'.\end{gathered} \tag{6}$$

---

* Это рассуждение аналогично соображениям, используемым обычно при анализе упругого рассеяния медленных частиц /2/.

Здесь $n_0 = \mathbf{k}/k$, величины $a_n(\mathbf{r})$ определяются функциями $\Psi_i(\mathbf{r})$ с $i < n$. Подставляя (5) в (4), получаем выражение для амплитуды рассеяния

$$f(\mathbf{n}, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^n f_n(\mathbf{n}),$$

$$f_n(\mathbf{n}) = -(4\pi)^{-1} \sum_{n'=0}^{n} \int \frac{(-\mathbf{n}\mathbf{r}')^{n-n'}}{(n-n')!} U\Psi_{n'} d\mathbf{r}', \tag{7}$$

т. е. для определения амплитуды рассеяния с точностью до $(ka)^n$ необходимо знать $(n+1)$ функций, которые определяются из уравнений (6).

Уравнения (6) и соотношения (7) решают поставленную задачу определения амплитуды рассеяния в виде ряда по степеням параметра ka. Отметим еще два обстоятельства.

Подставляя разложение (5) в уравнение (1), вместо интегральных уравнений (6) можно получить дифференциальные:

$$[\Delta - U(\mathbf{r})]\Psi_n(\mathbf{r}) = \Psi_{n-2}(\mathbf{r}); \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$
$$\Psi_{-2} = \Psi_{-1} = 0. \tag{8}$$

Цепочки уравнений (6) и (8) не противоречат друг другу. Граничные условия к уравнениям (8) можно получить из (6). Заметим, что первое слагаемое в (6) приводит к появлению растущих при $r \to \infty$ степеней r как в правых частях уравнений (8), так и в граничных условиях. При этом может оказаться более удобным от функций Ψ_n перейти к функциям $\Psi_n(\mathbf{r}) = a_n(\mathbf{r}) + \varphi_n(\mathbf{r})$. Функции $\varphi_n(\mathbf{r})$, в отличие от $\Psi_n(\mathbf{r})$, убывают при $r \to \infty$ и удовлетворяют уравнениям:

$$[\Delta - U(\mathbf{r})]\varphi_n(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) a_n(\mathbf{r}); \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$\varphi_n(\mathbf{r})|_{r \to \infty} = C_n / r.$$

Как видно из (7), коэффициенты $f_{lm}(k)$ разложения амплитуды рассеяния $f(\mathbf{n}, k)$ по сферическим функциям $Y_{lm}(\mathbf{n})$ при малых k пропорциональны k^l. В частном случае сферически симметричного потенциала вместо этого получается известный результат $f_{lm}(k) \sim k^{2l}$ /2/.

Авторы благодарны В.М. Бабичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ситенко А. Г. Теория рассеяния. Киев, Вища школа, 1975, § 3.1.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., ГИФМЛ, 1963, § 130.

Поступила в редакцию 30 сентября 1988 г.