Краткие сообщения по физике № 2-1989 г.

УДК 621.386

О ДЛИННОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А.В. Виноградов, О.И. Толстихин

Указана процедура, позволяющая последовательно находить поле и амплитуду рассеяния в виде рядов по степеням a/λ, где a – характерный радиус рассеивателя, λ – длина волны.

Поле излучения диполя $\mathbf{d}e^{-i\omega t}$ в ближней и дальней зонах имеет вид /1/:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = r^{-3}\left\{3\mathbf{n}(\mathbf{dn}) - \mathbf{d}\right\}, \quad a \ll r \ll \lambda, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k^2\,[\mathbf{n}[\mathbf{dn}]]\; e^{ikr}/r, \quad r \gg \lambda. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны; a – характерный размер диполя. Поле в ближней зоне (1) соответствует полю статического ($\omega = 0$) диполя $\mathbf{d}$ и имеет потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{dn}/r^2. \tag{3}$$

Рассмотрим задачу рассеяния плоской электромагнитной волны $\mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{kr}}$ на диэлектрической частице. Пусть $\epsilon(\mathbf{r})$ – распределение диэлектрической проницаемости рассеивающей частицы, так что $\epsilon(\mathbf{r}) \to 1$ при $r \gg a$, где a – характерный размер. Электрическое поле определяется уравнением

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - k^2\epsilon(\mathbf{r})\,\mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\,|_{r\to\infty} = \mathbf{e}_0 e^{i\,\mathbf{kr}} + \mathbf{f}(\mathbf{n}, \mathbf{k})\, e^{ikr}/r, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{n}; \mathbf{k})$ – амплитуда рассеяния.

Из соотношений (1) – (3) виден следующий способ определения амплитуды рассеяния в длинноволновом приближении $\lambda \gg a$: нужно решить уравнения электростатики

$$\operatorname{div}\epsilon(\mathbf{r})\,\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{6}$$

с граничным условием

$$\varphi(\mathbf{r})\,|_{r\to\infty} = -\mathbf{e}_0\mathbf{r} + \mathbf{dn}/r^2, \tag{6a}$$

где наведенный дипольный момент $\mathbf{d}$ определяется из решения уравнения (6), и затем амплитуду рассеяния $\mathbf{f}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ в соответствии с (2) определить по формуле (рэлеевский предел)

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = k^2\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{dn}]], \quad a \ll \lambda. \tag{7}$$

Указанный способ можно сформулировать и так: "электростатика является длинноволновым приближением электродинамики". Этот факт неоднократно обсуждался в литературе и доказывался для различных частных задач и граничных условий /2, 3/. На наш взгляд, весьма общим и методически полезным был бы вывод этого факта непосредственно из уравнений (4), (5), чему и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим интегральное уравнение, эквивалентное задаче (4), (5),

$$E = e_0 e^{ikr} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r - r'|}}{|r - r'|} [k^2 + \nabla \operatorname{div}] (1 - \epsilon(r')) E \, dr'. \tag{8}$$

Из (8) видно, что вдали от рассеивателя поле поперечно, а амплитуда рассеяния имеет вид

$$f_i(n, k) = \frac{k^2}{4\pi} (\delta_{ij} - n_i n_j) \int e^{-iknr'} (\epsilon(r') - 1) E_j dr'. \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) дают основания представить поле и амплитуду рассеяния в виде рядов по k:

$$E(r) = \sum_n (ik)^n E^{(n)}(r); \quad f(n, k) = \sum_n (ik)^n f^{(n)}(n, k), \tag{10}$$

где $f^{(n)}(n, k) \sim k^2$. Подстановка этих выражений в (8) и (9) приводит к уравнениям для последовательного определения $E(r)$ и $f(n, k)$ в любом порядке по k.

Функции $E^{(n)}(r)$, естественно, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, следующих из подстановки (10) в (4):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E^{(n)} = -\epsilon(r) E^{(n-2)}, \quad n = 0, 1, 2..., \quad E^{(-2)} = E^{(-1)} = 0. \tag{11}$$

Однако для однозначного определения $E^{(n)}$ систему (11) необходимо дополнить граничными условиями, которые следуют из уравнения (8). Рассмотрим более подробно случай n = 0.

Оставляя в (8) и (9) лишь главные по (ka) члены, находим:

$$E^{(0)} = e_0 - \frac{1}{4\pi} \nabla \operatorname{div} \int \frac{(1 - \epsilon(r')) E^{(0)}}{|r - r'|} dr', \tag{12}$$

$$f_i^{(0)} = (-k^2/4\pi)(\delta_{ij} - n_i n_j) \int (1 - \epsilon(r')) E_j^{(0)} dr'. \tag{13}$$

Из (12) видно, что $E^{(0)}$ потенциально, т.е. $E^{(0)} = -\nabla\varphi$, где $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi = -e_0 r - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \{(1 - \epsilon(r')) \nabla\varphi\}'}{|r - r'|} dr', \tag{14}$$

которое эквивалентно (6), (6а). Полагая в (14) $r \gg a$ и сравнивая с (6а), находим

$$d = \frac{1}{4\pi} \int (\epsilon(r') - 1) E^{(0)}(r') dr',$$

и, следовательно, формула (13) совпадает с (7).

Таким образом, уравнения электростатики (6), (6а) вместе с рэлеевским пределом (7) являются первым шагом регулярной процедуры разложения амплитуды рассеяния по степеням параметра (ka).

Авторы благодарны В.М. Бабичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1967, § 72.
2. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. М., Наука, 1982.
3. Бабич В.М. и др. Математические методы дифракции (материалы IX Всесоюзной школы по дифракции и распространению волн). Казань, 1988.

Поступила в редакцию 30 сентября 1988 г.