Краткие сообщения по физике № 4-1989 г.

УДК 535.42:517.946

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ КАК ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

В.Г. Волостников

Показана возможность сведения двумерной фазовой проблемы в зоне Френеля к одномерной. Приведены результаты численных экспериментов по восстановлению поля из измерений интенсивности.

Восстановление одномерного поля по интенсивности в зоне Френеля рассмотрено в /1/, где получены явные аналитические формулы связи интенсивности и фазы. Из исследования двумерного аналога задачи /2/ следует его принципиальное отличие от одномерного. Наличие в общем случае вихревой составляющей векторного поля потока световой энергии не позволяет перенести результаты одномерного случая на двумерный и получить связь интенсивности и фазы в аналитическом виде. В связи с этим представляют интерес методы восстановления, применимые для двумерных полей.

Рассмотрим задачу восстановления двумерного поля в зоне Френеля при сканировании узкой щелью. В приближении Френеля исходное поле $f(\xi, \eta)$ в области Ω и поле на расстоянии l связаны соотношением

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi l} \iint_{\Omega} f(\xi, \eta) \exp\left(\frac{ik}{2l}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right) d\xi d\eta. \tag{1}$$

Для щелевой диафрагмы: $\Omega = (\xi, \eta)$, $|\xi| < b$, $|\eta| < d$, $kd^2/2l \ll 1$ связь (1) примет вид:

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi l} \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2l}\right] \int_{-d}^{d}\int_{-b}^{b} f(\xi, \eta) \exp\left(\frac{ik\xi^2}{2l}\right) \exp\left[-\frac{ik(x\xi + y\eta)}{l}\right] d\xi d\eta. \tag{2}$$

Из (2) видно, что амплитуда $\Phi(x, y, l) = F(x, y, l)\sqrt{2\pi l/k}\,\exp(-ky^2/2l)$ удовлетворяет уравнению

$$2ik\left[\frac{\partial \Phi}{\partial l}(x, y, l) + \frac{y}{l}\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, l)\right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y, l) = 0. \tag{3}$$

Подставляя $\Phi(x, y, l)$ в виде $\Phi(x, y, l) = T^{1/2}(x, y, l)\exp(i\varphi(x, y, l))$ и разделяя в (3) вещественную и мнимую части, получим

$$k\left[\frac{\partial T}{\partial l}(x, y, l) + \frac{y}{l}\frac{\partial T}{\partial y}(x, y, l)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x, y, l)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, l)\right] = 0. \tag{4}$$

Чтобы решить уравнение (4) необходимо получить граничное условие на искомую фазу. Заметим, что при фиксировании одной из переменных (например, y) $T(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ являются целыми функциями конечной степени роста по x и полностью определяются нулями своих аналитических продолжений $T(z, y)$, $\Phi(z, y)$, причем $T(z, y) = \Phi(z, y)\overline{\Phi}(\overline{z}, y)$. Следовательно, задача построения $\Phi(x, y)$ сводится к выделению нулей $\Phi(z, y)$ из каждой пары нулей $T(z, y)$ /3/.

Для построения граничного условия применим метод, предложенный в /1/. Аналитическое продолжение $\Phi(z, y)$ удовлетворяет комплексному аналогу уравнения (3):

$$L\Phi = \left[2ik\left(\frac{\partial}{\partial l} + \frac{y}{l}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi(z, y, l) = 0. \tag{5}$$

Действуя оператором L на аналитическое продолжение $T(z, y, l)$, получим

$$LT(z, y, l) = 2\frac{\partial}{\partial z}\left[\Phi(z, y, l)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z}(\bar{z}, y, l)\right]. \tag{6}$$

Из (6) видно, что для выделения нулей $\Phi(z, y, l)$ из каждой пары сопряженных нулей $T(z, y, l)$ можно использовать соотношение

$$\int_{z_k(y)}^{z_j(y)} LT(z, y, l)\,dz = 2\Phi(z, y, l)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial z}(\bar{z}, y, l)\Big|_{z_k(y)}^{z_j(y)} = 0, \tag{7}$$

где z_k, z_j — нули $\Phi(z, y, l)$.

Пусть $z_0(y) = x_0(y) + iu_0(y)$ — любой нуль $\Phi(z, y, l)$. Тогда, учитывая, что $T\partial\varphi/\partial x = (\bar{\Phi}\partial\Phi/\partial x - \Phi\partial\bar{\Phi}/\partial x)/2i$, найдем

$$\int_{z_0(y)}^{x} LT(z, y, l)\,dz = 2\Phi(x, y, l)\,\partial\bar{\Phi}(x, y, l)/\partial x, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} T(x, y, l)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, l) &= -k\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial T}{\partial l}(x, y, l) + \frac{y}{l}\frac{\partial T}{\partial y}(x, y, l)\right]dx + C(y), \\ C(y) &= -k\int_{z_0(y)}^{x_0(y)}\left[\frac{\partial T}{\partial l}(z, y, l) + \frac{y}{l}\frac{\partial T}{\partial y}(z, y, l)\right]dz + \frac{1}{2i}\frac{\partial T}{\partial z}(z_0(y), y, l). \end{aligned} \tag{9}$$

После повторного интегрирования по x из (9) следует выражение для фазы. Граничное условие по фазе $\varphi(a, y)$ строится из аналитического продолжения (8) в комплексную плоскость $w = y + iv$ по нулям $\Phi(x, w)$ при $x = a$:

$$\varphi(a, y) = \arg\prod_j\left(1 - y/w_j(a)\right)\exp\left(y/w_j(a)\right), \tag{10}$$

где w_j — нули $\Phi(a, w)$

Граничное условие в виде (10) может быть найдено лишь при условии, что поле $\Phi(x, y, l)$ нельзя представить в виде $\Phi(x, y, l) = A(x, y, l)B(y, l)$. Для поля вида $\Phi(x, y, l) = B(y, l)$ это означает невозможность восстановления по интенсивности в дальней зоне. Задача легко сводится к одномерной в случае щели, уз кой по сравнению с характерным размером изменения поля по оси η: $\rho \gg d$. Положив $\Omega = \mathrm{rect}(\xi/b)\,\delta(\eta)$, получим простую связь между интенсивностью и фазой:

$$\varphi(x) = \varphi(a) - k\int_a^x dx' I^{-1}(x', l)\int_{x_0}^{x'} d\xi\left[\frac{\partial I}{\partial l}(\xi, l) + \frac{I}{l}(\xi, l)\right] + c_1\int_a^x\frac{dx'}{I(x', l)}, \tag{11}$$

где a — любая вещественная точка и

$$c_1 = -k\int_{z_0}^{x_0}\left[\frac{\partial I}{\partial l}(\xi, l) + \frac{I}{l}(\xi, l)\right]d\xi + \frac{1}{2i}\frac{\partial I}{\partial z}(z_0, l), \quad I = T/l = F\bar{F}.$$

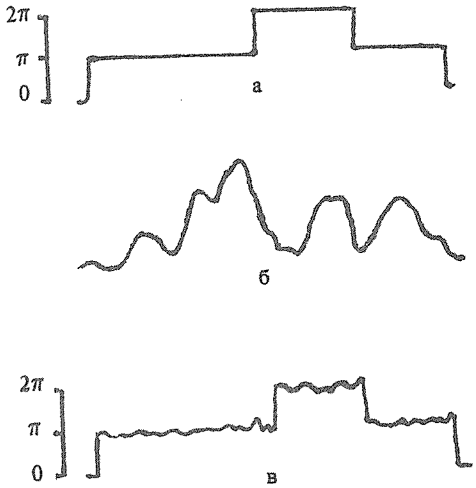

Рис. 1. Результаты численного эксперимента: а – модельное исходное распределение фазы; б – вид распределения интенсивности в плоскости регистрации; в – восстановленная фаза.

Цилиндрическая симметрия поля $F(x, y, l)$ относительно оси x в этом случае позволяет использовать для реализации алгоритмов восстановления линейные фотоприемники и производить измерения $I(x, l)$ при различных l за один акт измерения.

На рис. 1 представлены результаты численного эксперимента по восстановлению одномерного фазового поля из измерений интенсивности в зоне Френеля. Длина диафрагмы $2b = 500$ мкм, расстояние до плоскости регистрации $l = 40$ мм.

Задача (3) в математическом плане сходна с приведенной в /4/ для системы с астигматизмом. Прямоугольность диафрагмы не является существенной, необходимо лишь выполнение условия $km^2/2l \ll 1$, где $m = \max |\eta|$, причем $(\xi, \eta) \in \Omega$.

Таким образом, получена однозначная аналитическая связь интенсивности и фазы двумерного поля.

Автор благодарен Е.Г. Абрамочкину за помощь в проведении численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамочкин Е. Г. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 16 (1986).
2. Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г., Малов А. Н. К вопросу о двумерной фазовой проблеме в оптике в приближении Френеля. Куйбышев, 1987, с. 14. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3773-В87.
3. Обратные задачи в оптике (под ред. Г.П. Болтса). М., Машиностроение, 1984.
4. Абрамочкин Е. Г. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 7 (1987).

Поступила в редакцию 17 октября 1988 г.
После переработки 9 марта 1989 г.