УДК 530.1:533.7

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ НЕМАРКОВСКОГО ПОДХОДА

Ю. А. Кулагин, Р. И. Сериков, И. В. Симановский, Л. А. Шелепин

Рассматриваются области физических приложений немарковского подхода и связанных с ним интегродифференциальных уравнений. Обсуждаются пути практического решения задач, учитывающих память о прошлом.

В отличие от марковских процессов (или процессов без последействия), которые описываются дифференциальными и псевдодифференциальными уравнениями, немарковские процессы (сохраняющие память о прошлом) моделируются в общем случае нелинейными, нелокальными по времени интегродифференциальными уравнениями типа [1]:

$$df/dt = \int \Lambda(\tau) Q[f(t-\tau)] d\tau, \tag{1}$$

где $f(\tau)$ – функция, описывающая процесс, Q – нелинейный оператор, Λ – заданная функция. Упрощенное описание ряда немарковских процессов проводилось с помощью конечно-разностных уравнений типа

$$f_{t+1} = a_0 f_t + a_1 f_t + a_2 f_{t-1} \ldots . \tag{2}$$

Ранее нами была разработана методика решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, относящихся к классу некорректных задач [2]. Были рассмотрены математические основы метода регуляризации и предложен критериальный отбор параметра регуляризации. Предложенный алгоритм достаточно просто переносится на интегродифференциальные уравнения типа (1), что позволяет решать немарковские уравнения.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать наличие широкого класса конкретных физических задач, связанных с немарковскими процессами, а также рассмотреть возможности упрощенных немарковских схем, описываемых конечно-разностными уравнениями.

Как будет показано ниже, к немарковским относится обширный класс физических задач, но их немарковская природа присутствует неявно, скрыто, она остается на втором плане. В конкретных задачах основное внимание обращается на нелинейность. Однако нелинейное описание по своей сути остается незамкнутым. Рассмотрим конкретные примеры.

Модель "хищник" – "жертва" нашла широкую область применений в математической экологии [3]. В модели предполагается существование двух видов организмов. Один из них – "жертвы", с числом особей $N_1(t)$, может неограниченно получать питание из окружающей среды, второй вид – "хищники", с числом особей $N_2(t)$, питается только представителями первого вида. Изменение числа "жертв" может быть представлено уравнением

$$dN_1/dt = [k_1 - \epsilon_1 N_2(t)]N_1(t), \tag{3}$$

где k_1 – скорость размножения жертв, ϵ_1 – коэффициент пропорциональности, стоящий перед числом встреч "хищника" и "жертвы", кончающихся гибелью последних. Изменение числа "хищников" складывается из убыли за счет естественной смерти и прироста за счет рождаемости, зависящей от питания в течение некоторого времени τ, предшествующего появлению потомства. Соответствующее уравнение может быть представлено в виде

$$dN_1/dt = [-k_2 + \epsilon_2 \int_0^T N_1(t-\tau)F(\tau)d\tau]N_2(t), \tag{4}$$

где τ характеризует влияние количества съеденной "хищником" в момент времени τ пищи на рождаемость в момент t.

Таким образом, численность популяций удовлетворяет системе нелинейных уравнений (3) – (4), одно из которых является дифференциальным, а другое интегродифференциальным. Иными словами, система "хищник" – "жертва" как целое является немарковской и зависит от предыстории. Однако обычно в подавляющем большинстве работ вместо уравнения (4) используют уравнение

$$dN_1/dt = [-k_2 + \epsilon_2 N_1(t)]N_2(t). \tag{5}$$

Т.е. рассматривается система дифференциальных уравнений, и немарковость остается за кадром.

Аналогичная картина наблюдается в обширной литературе по колебательным химическим реакциям, в частности, по реакции Белоусова–Жаботинского. Ряд экспериментальных исследований [5] указывал, что индукционный период до начала колебаний зависит от предыстории. Однако известные теоретические модели брюсселятора и орегонатора, включающие соответственно 2 и 5 дифференциальных уравнений, являются марковскими. Они качественно согласуются с экспериментом. Вместе с тем, параметры, появляющиеся в моделях этого типа, редко известны с высокой точностью. Количественная оценка их роли дается на основе анализа чувствительности. Эдельсон и Рабиц [6] провели такой анализ применительно к проточным химическим системам. Предполагая зависимость параметров от времени, они интерпретировали функциональный коэффициент чувствительности как чувствительность i-го компонента в момент времени t по отношению к j-му параметру в предшествовавший момент τ. Такие характеристики дают нелокальный по времени отклик системы и поэтому содержат информацию о памяти. Здесь, также как и для модели "хищник" – "жертва", можно сказать, что общеупотребительные модели (орегонатор, брюсселятор) неполны и должны быть дополнены зависимостью от памяти. Таким образом, в общем случае колебательные химические процессы следует рассматривать как немарковские.

Большое внимание в литературе уделяется проблемам самоорганизации в жидкости. Ламинарное и турбулентное движение ньютоновской жидкости (для которой имеет место линейная зависимость между тензорами напряжений $\prod$ и деформации γ) описывается уравнениями Навье–Стокса. При этом все процессы самоорганизации рассматриваются на основе немарковского подхода. Наиболее общее (линейное) соотношение между напряжением и скоростью деформации γ имеет вид

$$\prod(t) = -\int \eta(t-s)\gamma(s)ds. \tag{6}$$

Зависящее от времени ядро η называется функцией вязкой памяти. Напряжение определяется не только текущим значением скорости деформации, но является линейным функционалом предыстории изменения скорости деформации. Ранее интегродифференциальные уравнения использовались для полимерных неньютоновских жидкостей. Этот подход характерен для реологии – совокупности методов исследования течения и деформации реальных сред. В работе [8] отмечается, что все жидкости в определенном смысле слова являются вязкоупругими, поскольку затухание флуктуаций равновесного напряжения занимает конечное время. Поэтому в общем случае любую жидкость в принципе следует рассматривать как немарковскую систему.

Уравнение Больцмана, описывающее газовую кинетику, является хотя и интегро-дифференциальным, но локальным по времени, т.е. марковским. В работе [7] оно естественным образом обобщено на немарковский случай. Это обобщение учитывает длительность парных атомных столкновений для плотного газа, когда, в частности, могут образовываться водородные связи между молекулами. Обобщенное уравнение имеет вид (1) с величиной Q, задаваемой оператором Больцмана:

$$Q[f(v,x,t)] = \int h(v,u,\mathbf{n})[f(V,x,t)f(U,x,t) - f(v,x,t)f(u,x,t)]d^2vd^2u, \qquad (7)$$

где u, v – скорости молекул до столкновения, U, V – скорости молекул после столкновения, h – ядро интеграла, $\mathbf{n}$ – вектор единичной длины, характеризующий направление переданного при столкновении импульса.

Немарковские уравнения возникают при описании процессов, связанных с гистерезисом. Так для тока в электрических цепях при наличии гистерезиса имеем [8]

$$di/dt = \int F(\tau)i(t-\tau)d\tau + f(t), \qquad (8)$$

где F – ядро интеграла, f – некоторая заданная функция.

Приведенные примеры, связанные с биологическими, химическими процессами, физикой газов и жидкости, электрических цепей, – это только небольшая часть имеющихся прикладных возможностей. По-видимому, современную физику можно рассматривать как марковское приближение будущей теории.

Во всех этих задачах в принципе может быть применен метод решения интегро-дифференциальных уравнений, разработанный в [2]. Однако в настоящее время обычно ядро в интегралах известно лишь с малой степенью точности. Это хорошо видно на примере уравнения (4), относящегося к модели "хищник – жертва". Поэтому для решения практических задач целесообразно использовать конечно-разностные уравнения типа (2), возникающие при представлении функции $f(t)$ в виде ряда. При его подстановке в (1) возникает бесконечная система разностных уравнений. Если оборвать ряд (и удержать малое число членов) возникают упрощенные немарковские уравнения. Изучение их свойств позволяет отыскивать универсальные характеристики поведения простых систем, которые, по-видимому, не зависят от конкретных деталей модели. Наглядной иллюстрацией этого положения служат конечно-разностные нелинейные уравнения марковского типа (в которых сохраняется лишь первый член): $f_{t+1} = Q(f_1)$. Было проведено детальное исследование нелинейного разностного уравнения

$$x_{n=1} = rx_n(1 - x_n). \tag{9}$$

Несмотря на кажущуюся простоту, оно обнаруживает столь сложное поведение, что может служить моделью перехода к хаотическому состоянию. В работе [9] было показано, что поведение системы типа (9) сильно меняется при добавлении слабого шума. Т.е. небольшая немарковская добавка может играть существенную роль.

В этой связи значительный интерес представляет вопрос: как оптимально воспринять и использовать память о прошлом, сколько членов ряда целесобрано учитывать? Рассмотрим эту проблему на примере линейного уравнения (2) для двух случаев с двумя и тремя членами ряда в правой части, применительно к процессу ценообразования [10]. Ценообразование определяется спросом – предложением. В простейшем случае числовая последовательность величин y_t, которые определяют отклонение текущей цены от равновесной, представляет собой знакочередующуюся геометрическую прогрессию

$$y_{t+1} = -qy_t, \tag{10}$$

где q – характерный параметр, зависящий от функций спроса и предложения. При $q > 1$ последовательность y_t неограниченно возрастает и амплитуда колебаний цен увеличивается. При немарковском подходе товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения, ориентируется не на последнюю по времени цену, а принимает во внимание ее динамику. Чтобы сделать более адекватный прогноз уровня цен на завтра, он исходит из информации о ценах "сегодня" и "вчера". При этом прогнозируемая цена уже не равна y_t, а имеет некоторое промежуточное значение между y_t и y_{t-1}. Тогда вместо (10) имеем

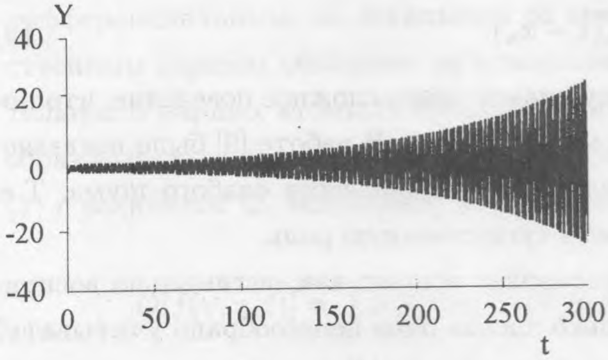
$$y_{t+1} = -q(1 - r)y_t - qry_{t-1}. \tag{11}$$

Прогноз может опираться на больший объем памяти о прошлом, учитывая "позавчера", наряду с "сегодня" и "вчера". Этому случаю соответствует уравнение

$$y_{t+1} = -q(1 - r)y_t - qry_{t-1} + by_{t-2}. \tag{12}$$

Здесь мы уже получаем дополнительный параметр регулирования и можем в принципе уточнить прогноз ценообразования. Однако это увеличивает сложность анализа.

Оценим влияние члена $a_3 = b$ на процесс устойчивости и сходимости итерационного процесса динамики цен (12). Под устойчивостью здесь понимается устойчивость



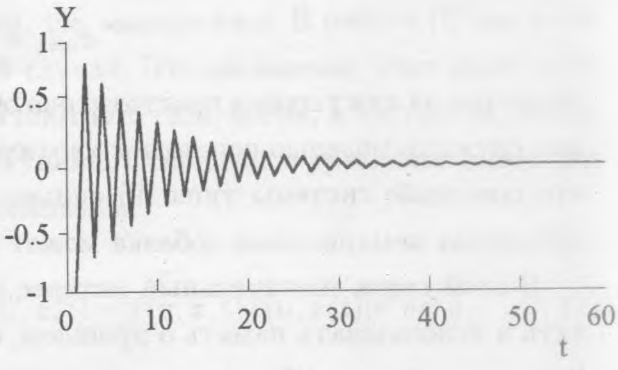


Рис. 1. *Решение уравнения (11) при* $a_1 = -1.1$, $a_2 = -0.09$.

Рис. 2. *Решение уравнения (11) при* $a_1 = -1.0$, $a_2 = -0.09$.

решения $y(t)$ к малым возмущениям коэффициентов системы a_1, a_2, a_3, а сходимость понимается в смысле выполнения условия $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Решением разностного уравнения (12) с постоянными коэффициентами являются линейные комбинации функций вида $y(t) = \lambda'$, где λ является корнем следующего характеристического уравнения:

$$\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3 = 0. \tag{13}$$

Его решением являются действительное число $\lambda_1(a_1, a_2, a_3)$ и пара комплексно-сопряженных корней $\lambda_{2,3}(a_1, a_2, a_3) = \rho \exp\left(\pm i\varphi\right)$ Общее решение уравнения (12) имеет вид:

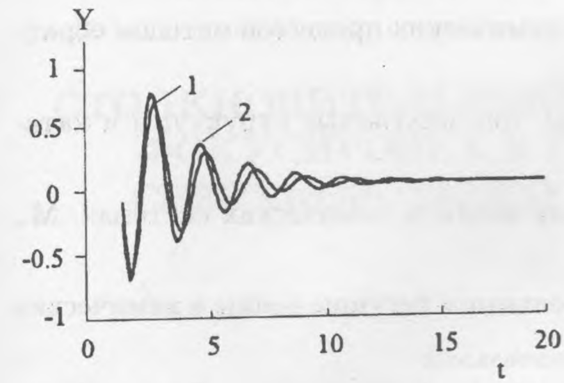
$$Y(t) = A\lambda_1^t + B\rho^t[\cos(\varphi t) + \sin(\varphi t)], \tag{14}$$

где значения коэффициентов A и B определяются начальными условиями, модуль и фаза комплексного числа являются функциями переменных a_1, a_2, a_3.

Точное аналитическое выражение для решения $Y(t)$ является слишком громоздким, чтобы его здесь приводить, поэтому ограничимся качественным графическим анализом полученного решения. Сравним данное решение с решением разностного уравнения (11), которое в случае положительного дискриминанта имеет вид

$$y(t) = A\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + 4a_2}\right)^t + B\left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + 4a_2}\right)^t. \tag{15}$$

Из рис. 1 и 2 видно, что прогнозирование динамики цен на основании информации о ценах "сегодня" и "вчера" является неустойчивым процессом, т.к. небольшие изменения



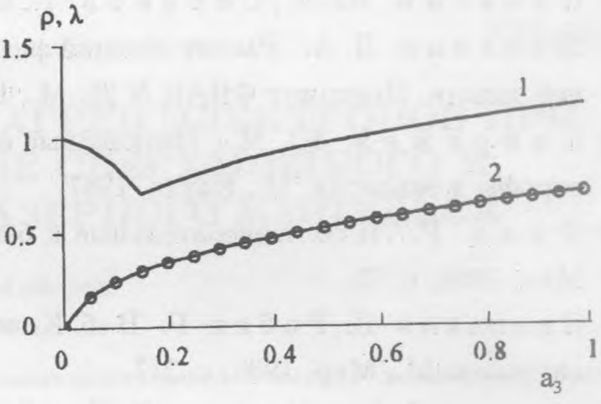


Рис. 3. *Решение уравнения (12) при* $a_1 = -1.0$, $a_2 = -0.09$, $a_3 = 0.136$(1) *и* $a_1 = -1.0$, $a_2 = -0.09$, $a_3 = 0.148$(2).

Рис. 4. *Зависимость амплитуд от параметра* a_3: $\rho(-1.1, -0.09)$ *(1) и* $\lambda(-1.1, -0.09)$ *(2).*

в коэффициентах системы (11) приводят к сильному возмущению. При этом решение кардинальным образом меняется от "раскачивания" амплитуды цен до установления равновесного значения.

Из рис. 3 видно, что учет памяти о прошлом "позавчера" дает возможность, во-первых, получить решение $Y(t)$, устойчивое к малым возмущениям входных данных; во-вторых, получить сходящееся решение даже для тех значений коэффициентов a_1, a_2, при которых в системе с обучением (11) не существует устойчивого решения; в-третьих, увеличить скорость сходимости в несколько раз.

Очевидно, сходимость решения $Y(t)$ определяется одновременым выполнением неравенств $|\lambda_1(a_1, a_2, a_3)| < 1$ и $|\rho(a_1, a_2, a_3)| < 1$. На рис. 4 даны графики зависимостей амплитуд действительного и комплексного чисел от параметра $0 < a_3 < 1$ для заданных значений a_1, a_2. Отсюда видно, что при выборе параметра a_3 из условия минимума функции $\rho(a_1, a_2, a_3)$ сходимость решения достигается за меньшее число итераций по времени. При $a_3 > 0.58$ решением является знакопеременная функция с увеличивающейся амплитудой. Следовательно, учет полной информации о прошлом с весовым множителем a_3, близким к единице, приводит к неустойчивости решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А з р о я н ц Э. А., Ш е л е п и н Л. А. Немарковские процессы и их приложения.

Препринт ФИАН N 58, М., 1998.

[2] Кулагин Ю. А., Сериков Р. И., Симановский И. В., Шелепин Л. А. Расчет сечений физико-химических процессов методом обратной задачи. Препринт ФИАН N 25, М., 1999.

[3] Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М., Наука, 1987.

[4] Филд Р. В сб. Колебательные и бегущие волны в химических системах. М., Мир, 1988, с. 75.

[5] Эдельсон Д., Рабиц Г. В сб. Колебательные и бегущие волны в химических системах. М., Мир, 1988, с. 217.

[6] Эванс Д. Дж., Хэнли Г. Дж., Гесс З. В сб. Физика за рубежом. Серия А. М., Мир, 1986, с. 7.

[7] Попырин С. Л. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 4, 10 (1999).

[8] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М., Изд. МГУ, 1989.

[9] Йорк Дж. А., Йорк Э. Д. В сб. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М., Мир, 1984, с. 101.

[10] Лебедев В. В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М., Изограф, 1997.

Поступила в редакцию 25 мая 1999 г.