УДК 533.951

О ПРЕДЕЛЬНОМ ТОКЕ МАГНИТНОИЗОЛИРОВАННОГО ДИОДА

В.Ю. Шафер

Из принципа стационарного действия, аналогичного принципу Мопертюи – Лагранжа в механике, получено уравнение для профиля потенциала электронного пучка в плоском магнитноизолированном диоде (МИД) в случае бесконечного ведущего магнитного поля. Показано, что ток МИД равен предельному току дрейфового пространства для пучка данной конфигурации и энергии.

Исследуемая модель МИД изображена на рис. 1. С точки зрения физики она адекватна используемым в экспериментах цилиндрическим коаксиальным диодам, но описывается более простыми формулами. Анод $1,1'$ – плоскости $y_A = \pm a$ (параллельные xOz – плоскости симметрии системы); катод $2,2'$ – полуплоскости $y_k = \pm b$, $x \leqslant 0$. Анод и катод обладают идеальной проводимостью и находятся при постоянных потенциалах: $\Phi_A = 0$, $\Phi_k = -U_0$ $(U_0 > 0)$. Эмиссионную способность катода считаем неограниченной. Вдоль оси x приложено внешнее однородное магнитное поле $B_{ox} = \infty$, препятствующее движению электронов в направлениях y и z. Штриховые линии 3 и $3'$ $(y_п = y_k = \pm b,\ x \geqslant 0)$ изображают две идентичные ветви бесконечно тонкого ленточного пучка. Пучок считаем моноэнергетическим – с полной энергией электронов в единицах mc^2: $\gamma_0 = 1 + eU_0/mc^2$; $e > 0$, заряд m – масса электрона; c – скорость света. Рассматриваем только стационарные состояния, однородные в направлении оси z. Пучок описываем следующими переменными: N(x) – поверхностная плотность числа электронов, V(x) – гидродинамическая скорость.

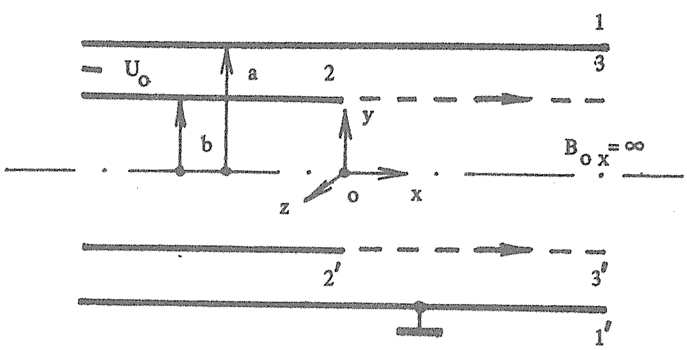

Рис. 1. Схема МИД: $1,1'$ – анод, $2,2'$ – катод, $3,3'$ – пучок.

Током пучка называем величину $J = eN(x)V(x)$ – ток одной из ветвей (например, ветви 3 на рис. 1), приходящийся на единицу длины в направлении z. При однородной вдоль x конфигурации анода и пучка и в предположении бесконечной эмиссионной способности катода естественно ожидать, что ток МИД совпадает с предельным током пучка в дрейфовом пространстве (ДП) $(x > 2a)$, который в данном случае равен

$$J_{пр} = (mc^3/e)\,(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}/4\pi(a - b). \qquad (1)$$

(Формула (1) лишь геометрическим фактором $4\pi(a - b)$ вместо $2\ln(R_a/R_b)$ отличается от известной /1/ формулы для $J_{пр}$ однородного бесконечно тонкого трубчатого пучка радиуса R_b в коаксиальном волноводе радиуса R_a.) В подтверждение этого предположения сошлемся на экспериментальную работу

/2/, в которой измеренные токи коаксиального МИД с точностью 20% совпадали с предельными токами ДП, рассчитанными в /3/ для пучков реализуемых конфигураций – в условиях конечного ведущего магнитного поля.

В теоретических работах /4–6/, посвященных прямому вычислению тока коаксиального МИД (цилиндрического аналога плоской модели), утверждается, что максимальный ток диода определяется "не пропускной способностью транспортирующей системы, а зоной ускорения в диоде" – областью вблизи катода $0 < x < 2a$. Выражение для максимального тока в этой теории имеет вид (в плоской геометрии):

$$J^*_{пр} = (mc^3/e)\,(\gamma^*_\infty - 1)\,[(\gamma^*_\infty)^2 - 1]^{1/2}/8\pi(a-b), \quad \gamma^*_\infty = (2\gamma_0 + 1/4)^{1/2} - 1/2, \tag{2}$$

где γ^*_∞ – релятивистский фактор пучка в области дрейфа ($x \to \infty$). Формула (2) отличается от соответствующего выражения в /4–6/ для цилиндрического диода тем же геометрическим фактором, о котором говорилось выше. В пучке с током (1) $\gamma_\infty = \gamma_0^{1/3}$.

Вывод формулы (2) основан на утверждении, что в стационарном режиме работы диода потоки вдоль оси x – заряда, энергии и продольной компоненты "суммарного импульса частиц и электростатического поля /6/" – однородны, т.е. не зависят от x. Поэтому можно (игнорируя зону ускорения) приравнять значения потоков соответствующих величин в областях $x = -\infty$ и $x = +\infty$, где они вычисляются тривиально. Из полученной таким образом системы уравнений и решения уравнения Пуассона при $x = \pm\infty$ следует (2).

Электрический ток и поток энергии в стационарном режиме однородны. Но однородность продольной компоненты полного потока импульса (xx – компоненты тензора напряжений) не является необходимым следствием стационарности, как не является и выражением закона сохранения полного импульса в диоде. Отличная от нуля разность значений потока импульса на выходе и на входе диода свидетельствует о действии на катод силы отдачи (при $J > J^*_{пр}$) или силы тяги (в направлении Ox при $J < J^*_{пр}$) и равна этой силе.

В данной работе ток МИД выводится из принципа стационарного действия. Определим потенциал пучка $\Phi_п(x) \equiv \Phi(x \geq 0,\ y = \pm b) = \Phi_п[N(x)]$ и поверхностную плотность заряда на катоде $N_k(x \leq 0) = N_k[N(x)]$ как функции профиля плотности пучка $N(x \geq 0)$. Для этого решим краевую задачу:

$$\begin{gathered}\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,\ |\Phi(x,y)| < \infty,\ -\infty < x < +\infty,\ 0 \leq y \leq a;\ \Phi(x, y=a) = 0,\ \Phi_y(x, y=0) = 0,\ -\infty < x < +\infty;\\ \Phi(x \leq 0,\ y=b) = -U_0;\ \Phi_y(x, y=b+0) - \Phi_y(x, y=b-0) = 4\pi e N(x),\quad x \geq 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Задача решалась методом Винера – Хопфа. Выражение для $\Phi_п(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\Phi_п(x) = &-(2U_0/\pi)\sum_{m=0}^{\infty} \exp[(m+1/2)(G - \pi x)/a]\,(\alpha_m)_m \cos\beta_m/m!\,(2m+1) -\\ &- 8e\sum_{n=0}^{\infty}[\cos^2\beta_n/(2n+1)]\int_0^\infty N(\xi)\exp[-\pi(n+1/2)|x-\xi|/a]\,d\xi +\\ &+ 4e(1-b/a)\sum_{m,n=0}^{\infty} N(n)\exp[(G(m+n+1) - \pi x(m+1/2))/a]\,(\alpha_m)_m(\alpha_n)_n \times\\ &\times \cos\beta_m\cos\beta_n/m!n!\,(m+n+1).\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+k-1)$, $(\alpha)_0 = 1$ – символ Похгаммера; $G = a\ln a - b\ln b - (a-b)\ln(a-b)$; $\alpha_k = 1/2 - (k+1/2)b/a$; $\beta_k = \pi(k+1/2)b/a$; $N(n) = \int_0^\infty N(x)\exp[-\pi(n+1/2)x/a]\,dx$.

Формула для $N_k(x)$ более громоздкая, поэтому здесь не приводится.

В механике поведение (конфигурация) систем с постоянной энергией определяется принципом стационарного действия в форме Мопертюи – Лагранжа /7/: $\delta S = 0$, $S = \Sigma \int p_i dr_i = S(\Sigma p_i v_i)\,dt$, где p_i, v_i – импульс и скорость i-й частицы, суммирование проводится по всем частицам системы, а интегралы берутся вдоль траекторий частиц. В силу стационарности исследуемых состояний действие в нашем случае пропорционально времени t, поэтому далее будем варьировать величину $S_t = dS/dt$, которая от времени уже не зависит. Для перехода к сплошной среде величину $p_i v_i$ (имеющую смысл потока импульса частицы вдоль ее траектории) заменим на след тензора напряжений среды $\sigma_{\alpha\alpha}(r)$ (по $\alpha = x,y,z$ суммирование), а сумму по частицам заменим интегрированием по всему объему диода (фактически – по половине объема, приходящегося на единицу длины в z-направлении: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant a$). Тензор напряжений в диоде есть сумма двух слагаемых, отвечающих вкладу поля и пучка; полевая часть равна: $\sigma^f_{\alpha\alpha} = (E^2 + B^2)/8\pi$ (след максвелловского тензора напряжений), а вклад пучка $\sigma^b_{\alpha\alpha} = \rho(x)\gamma(x)V^2(x)$, где $\rho(x) = mN(x)\delta(y-b)$ – массовая плотность пучка, $\gamma(x) = [1 - V^2(x)/c^2]^{-1/2}$ – его релятивистский фактор.

Задача определения профиля и тока пучка сводится к решению вариационной задачи:

$$\delta S_t = 0,\ S_t = \int_0^\infty mN(x)\gamma(x)V^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 eU_0N_k(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty eN(x)\Phi_п(x)\,dx; \tag{5}$$

$$\gamma(x) = \gamma_0 + e\Phi_п(x)/mc^2,\quad \Phi_п(x) = \Phi_п[N(x)],\quad N_k(x) = N_k[N(x)]. \tag{6}$$

Первое из соотношений (6) – закон сохранения энергии для электронов пучка – является следствием однородности тока и потока энергии; связи (6) позволяют выразить вариации всех величин через вариацию $\delta N(x)$, которая считается произвольной.

Решением вариационной задачи является уравнение:

$$\gamma_0 + \gamma(x) - 2/\gamma(x) - 2(J/J_{пр})[(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}/\pi(a-b)]\sum_{n=0}^{\infty}[\cos^2\beta_n/(2n+1)]\times$$

$$\times\int_0^\infty A(\xi)\exp[-\pi(n+1/2)|x-\xi|/a]\,d\xi + (J/J_{пр})[(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}/\pi a]\sum_{m,n=0}^{\infty}A(m)\times$$

$$\times\exp[(G(m+n+1) - \pi x(n+1/2))/a](\alpha_m)_m(\alpha_n)_n\cos\beta_m\cos\beta_n/m!n!(m+n+1) +$$

$$+(\gamma_0 - 1)\sum_{n=0}^{\infty}(1/\pi n!)\exp[(n+1/2)(G-\pi x)/a](\alpha_n)_n\cos\beta_n\Big\{b\sum_{m=0}^{\infty}[(-1)^m/m!(m+1/2)]\times$$

$$\times\exp[-(m+1/2)G/b](1/2 - (m+1/2)a/b)_{m+1}/[a(m+1/2) - b(n+1/2)] - (a-b)\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}[(-1)^m/m!]\exp[-mG/(a-b)](1/2 - ma/(a-b))_m/[am - (a-b)(n+1/2)]\Big\} = 0.$$

Здесь $A(x) = [\gamma(x) + 2/\gamma(x)]/(\gamma^2(x) - 1)^{1/2}$, $A(m) = \int_0^\infty A(x)\exp[-\pi(m+1/2)x/a]\,dx$. В пределе $x \to \infty$ уравнение (7) становится алгебраическим относительно $\gamma_\infty = \gamma(x\to\infty)$ (при этом J надо тоже выразить через γ_∞ с помощью соотношений $J = eN_\infty V_\infty$, $N_\infty = -\Phi_п(x\to\infty)/4\pi e(a-b)$. Из него находим: $\gamma_\infty = \gamma_0^{1/3}$ и, следовательно, $J = J_{пр}$. Заменяя в (7) отношение $J/J_{пр}$ единицей, получим уравнение для $\gamma(x)$ (или для $\Phi_п(x)$) с граничными условиями: $\gamma(0) = 1$, $\gamma(\infty) = \gamma_0^{1/3}$. Это уравнение можно решать на ЭВМ.

Ток диода получился равным предельному току (1), который, с одной стороны, является максимально возможным (бо́льший ток через ДП не пройдет), а с другой – этот же ток оказался предпочтительным с точки зрения принципа стационарного действия; импеданс диода $Z = U_0/J$ при этом минимален.

Возникает вопрос: можно ли расширенно истолковать полученный результат – в виде "принципа минимального импеданса": в рамках теоретической модели или в условиях конкретного эксперимента диод "выбирает" режим разряда с минимальным импедансом? Ответ на него не очевиден, если принять в расчет диссипации и неустойчивости пучка, роль которых в сопротивлении току разряда неоднозначна.

Автор благодарен Л.М. Коврижных и А.А. Рухадзе, по инициативе которых сделана эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. УФН, 103, 609 (1971).
2. Коломенский А.А., Крастелев Е.Г., Яблоков Б.Н. Письма в ЖТФ, 2, 271 (1976).
3. Воронин В.С., Лебедев А.Н. ЖТФ, 43, 2591 (1973).
4. Федосов А.И. и др. Изв. ВУЗов. Физика, №10, 134 (1977).
5. Belomytsev S.Ya. et al. Proc. 3rd Int. Conf. on High Power Electron and Ion Beams. Novosibirsk, 1979, v. II, p. 533.
6. Беломытцев С.Я. и др. Физика плазмы, 7, 86 (1981).
7. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 27 февраля 1989 г.