Краткие сообщения по физике № 8-1989 г.

УДК 621.371

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Э.Г. Пестов

Получены новые формулы для коэффициента отражения электромагнитной волны от неоднородной слоистой поглощающей среды и для комплексных амплитуд падающей и отраженной волн при нормальном падении. Эти формулы содержат итерационные компоненты, дающие возможность оценивать точность и границы области применимости различных приближеных соотношений.

В работах /1, 2/ исследовано распространение электромагнитной волны (ЭМВ) в среде с переменным вещественным показателем преломления $n(x)$ и получена формула для коэффициента отражения ЭМВ от такой среды. Представляет интерес исследовать более общий случай неоднородной поглощающей среды с комплексным показателем преломления.

Рассмотрим среду, комплексная диэлектрическая проницаемость которой зависит только от координаты x и частоты ЭМВ ω $\epsilon = \epsilon(x, \omega)$. Считаем, что при $x < x_1$ и $x > x_2$ $n(x) = \text{const}$, причем $n(x < x_1) = n_1 \neq n_2 = n(x > x_2)$, а на интервале (x_1, x_2) $n(x)$ – произвольная комплексная функция. Предположим, что на неоднородную среду нормально падает волна со стороны положительных x. Тогда в общем случае в среде распространяются падающая, прошедшая и отраженная волны. Распространение монохроматической ЭМВ $E(x)$ вдоль оси x описываем уравнением /1/

$$[d^2/dx^2 + n^2(x)/\lambda^2]\,E(x) = 0, \tag{1}$$

где $n^2(x) = \epsilon(x, \omega)$, $\lambda = c/\omega$. В соответствии с /1, 2/ решение уравнения (1) ищем в виде суперпозиции прямой и отраженной волн

$$E(x) = a(x)\,n^{-1/2}\exp[-i\psi(x)/2] + b(x)\,n^{-1/2}\exp[i\psi(x)/2].$$

Здесь $\psi(x) = (2/\lambda)\int\limits_{x_0}^{x} n(x')\,dx'$, а функции $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют системе уравнений /1, 2/

$$da/dx = f_1(x)b(x), \quad db/dx = f_2(x)a(x), \tag{2}$$

где обозначено $f_1(x) = (n'/2n)\exp[i\psi(x)]$, $f_2(x) = (n'/2n)\exp[-i\psi(x)]$, $n' \equiv dn/dx$.

Для решения уравнений (2) введем функцию $\rho(x) = b(x)/a(x)$, для которой из (2) получим

$$\begin{gathered} d\rho/dx = f_2(x)(1-\rho^2) - \Delta f(x)\rho^2, \\ \Delta f(x) = f_1(x) - f_2(x) = (n'/n)\,\text{sh}[i\psi(x)]. \end{gathered} \tag{3}$$

Функция $\rho(x)$ характеризует отношение комплексных амплитуд отраженной и падающей волн. Формальным решением уравнения (3) в области аналитичности ($|\rho| < 1$) является выражение

$$\begin{gathered} \rho(x) = \text{th}\Big[J(x) - \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\rho^2(x'')}{1-\rho^2(x'')}\,\Delta f(x'')dx''\Big], \\ J(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x} \frac{n'(x'')}{n(x'')}\exp\Big[-\frac{2i}{\lambda}\int\limits_{x_0}^{x''} n(x')dx'\Big]dx''. \end{gathered} \tag{4}$$

Точная формула (4) является интегральным уравнением относительно функции $\rho(x)$, удобным для итерационных вычислений. Допустим, что модуль коэффициента отражения мал ($|\rho|^2 \ll 1$), тогда из (4) приближенно получим:

$$\rho(x) \approx \operatorname{th} J_1(x), \; a(x) \approx \operatorname{ch} J_1(x), \; b(x) \approx \operatorname{sh} J_1(x), \tag{5}$$

$$J_1(x) \approx J(x) - \int_{x_1}^{x} \Delta f(x'') \operatorname{sh}^2 J(x'') dx''. \tag{6}$$

Процедуру итерационных уточнений формул (5) и (6) можно продолжить, сделав замену $J(x) \to J_1(x)$, $J_1(x) \to J_2(x)$ и т.д. Вторе слагаемое в выражении (6) дает поправку к известным результатам, которая позволяет производить оценку точности и границ области применимости различных приближенных соотношений. В тех случаях, когда коэффициент отражения мал ($|J(x)| \ll 1$) или выполняется неравенство $|\psi(x)| \ll 1$, вторым слагаемым в выражениях (4) и (6) можно пренебречь, и формула для комплексного коэффициента отражения $\rho(x)$ принимает вид:

$$\rho(x) \approx \operatorname{th}\left[\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x} \frac{n'(x'')}{n(x'')} \exp\left(- \frac{2i}{\lambda} \int_{x_0}^{x''} n(x') dx' \right) dx'' \right]. \tag{7}$$

Отсюда для модуля коэффициента отражения получим

$$R(x) \equiv |\rho(x)| \approx |\operatorname{th} J(x)|. \tag{8}$$

Формула (8) отличается от результата, найденного другим методом в работе /1/ тем, что вместо $\operatorname{th}|J(x)|$ /1/ в (8) фигурирует модуль $|\operatorname{th} J(x)|$. Применительно к вещественным показателям преломления это обстоятельство не существенно. Однако для комплексных $n(x)$ отмеченное различие имеет принципиальное значение. По этой причине результаты работ /1, 2/ не могут быть использованы при анализе распространения ЭМВ в неоднородной поглощающей среде.

В случае вещественных $n(x)$ формулы (7), (8), также как и соотношения работ /1, 2/, приводят к правильным результатам в приближении геометрической оптики ($\lambda \to 0$), а в противоположном предельном случае больших длин волн λ обеспечивают корректный переход к борновскому приближению. Они дают точные условия просветления оптики и ряд других известных результатов /2/.

Полученные формулы (5) – (8) для функций $\rho(x)$, $a(x)$, $b(x)$ позволяют исследовать широкий спектр задач теории распространения ЭМВ в неоднородных слоистых средах с комплексной диэлектрической проницаемостью. В качестве примера рассмотрим френелевское отражение от среды с комплексным показателем преломления $n(x)$. В этом случае имеется резкий скачок показателя преломления: при $x < x_1$ $n(x) = n_1$, а при $x > x_2$ $n(x) = n_2$; в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ $n(x)$ – ограниченная функция, такая что $(x_2 - x_1)|n(x)|_{max} \ll \lambda$. С учетом выполняющегося при этом неравенства $|\psi(x_2)| \ll 1$ из (7) и (8) получаем

$$R(x_2) = |\operatorname{th} J(x_2)| = |\operatorname{th}(\ln\sqrt{n_2/n_1})| = |(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)|,$$

которое является известной формулой Френеля.

Автор благодарен Л.П. Преснякову за постановку задачи и обсуждение результатов

ЛИТЕРАТУРА

1. Пресняков Л.П., Собельман И.И. Изв. ВУЗов, радиофизика, 8, 57 (1965).
2. Пресняков Л.П. Труды ФИАН, 119, 52 (1980).

Поступила в редакцию 27 апреля 1989 г.