УДК 621.373.8

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛЕНКИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА, ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ф.Х. Мирзоев, Л. А. Шелепин

Исследована нелинейная устойчивость течения пленки расплавленного металла вдоль фронта плавления с учетом испарения со свободной поверхности при интенсивных лазерных воздействиях. Выявлены основные факторы, определяющие формирование нелинейных волновых режимов стекания расплава. Получены оценки амплитуды и периода нелинейных волн.

Изучению волновых процессов, сопровождающих течение тонких слоев вязкой жидкости в линейной и нелинейной постановке задачи для случая свободного стекания посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Для парогазовой каверны, образующейся при воздействии концентрированных потоков энергии (лазерные и электронные пучки), исследование гидродинамических волновых неустойчивостей значительно усложняется благодаря их взаимосвязи с процессами теплопереноса, испарения и взаимодействия паров металла с внешним потоком.

В данной работе в качестве первого приближения рассматривается волнообразование при течении вдоль фронта плавления плоского слоя расплавленного металла под влиянием сил давления отдачи паров и термокапиллярного эффекта. Уравнение свободной поверхности $y = h(x,t)$, h – толщина расплава; $y = 0$ – поверхность фазового перехода твердое тело – жидкость. Процесс происходит в вакууме. Поглощение энергии излучения в паровой фазе не учитывается.

В безразмерных переменных уравнения динамики расплава и теплопереноса имеют вид [3, 4]

$$u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

$$u_t + vu_y + uu_x = (\alpha Fr)^{-1} - p_x + (\alpha Re)^{-1}\Delta u, \tag{2}$$

$$\alpha^2(v_t + vv_y + uv_x) = -\mathrm{ctg}\theta Fr^{-1} - p_y + \alpha Re^{-1}\Delta v, \tag{3}$$

$$T_t + vT_y + uT_x = (\alpha Pe)^{-1}\Delta T. \tag{4}$$

Граничные условия на свободной поверхности $y = h(x,t)$ запишем в виде

$$q = \alpha K(v - h_t - uh_x)Y^{-1}, \tag{5}$$

$$q + q^3[(\Lambda K)^2\Omega]^{-1} + (T_y - \alpha^2 h_x T_x)Y^{-1} +$$
$$+q^2(\Omega ReY^2)^{-1}u_x(1+\alpha^2 h_x^2)(1-\alpha^2 h_x^2)^{-1} - q_L = 0, \tag{6}$$

$$p + \alpha^2 W h_{xx} Y^{-3} - q^2(\Lambda K^2)^{-1} + 2\alpha Re^{-1}u_x(1+\alpha^2 h_x^2)(1-\alpha^2 h_x^2)^{-1} = 0, \tag{7}$$

$$4\alpha^2 u_x h_x - (u_y + \alpha^2 v_x)(1-\alpha^2 h_x^2) = 2\alpha MaPr^{-1}(T_x + T_y h_x)Y. \tag{8}$$

На границе раздела фаз жидкость – твердое тело $(y = 0)$: $u = v = 0$, $T = 0$.

При записи (1) – (8) в качестве масштабов времени, давления, температуры и плотности потока массы использованы h_0/v_0, ρv_0^2, $\Delta T = T_v - T_m$, $k\Delta T/h_0\lambda_v$ (h_0 – средняя толщина расплава, l_0 – продольный масштаб волновых возмущений, v_0 – характерная скорость при безволновом режиме течения расплава). В качестве параметров – число Рейнольдса $Re = v_0 h_0/v$, число Прандтля $Pr = v/\chi$, число Пекле $Pe = RePr$, число Вебера $W = \sigma/\rho V_0^2 h_0$, число Кутателадзе $Ku = \lambda_v/C_p\Delta T$, число Фруда $Fr = v_0^2/gh_0\sin\theta$, число Марангони $Ma = \sigma_T \Delta T h_0/2\rho v k$, $K = RePrKu$, $F = Re/Fr$, $\Omega = 2\lambda_v/v_0^2$, $\Lambda = \rho^{(v)}/\rho$, где T_v, T_m – соответственно температуры испарения и плавления, $\alpha = 2\pi h_0/l_0$ – волновое число, q – плотность потока массы за счет испарения жидкости; λ_v – теплота испарения; k, $k^{(v)}$ – соответственно коэффициенты теплопроводности жидкости и пара. θ – угол наклона плоскости течения, $q_L = \alpha_L I$ (I – интенсивность излучения, α_L – коэффициент поглощения); $\sigma_T = -d\sigma/dT > 0$ – температурный коэффициент поверхностного натяжения. Заметим, что параметр K^{-1} представляет собой отношение вязкостного масштаба времени $t_v = h_0^2/v$ к испарительному масштабу времени $t_E = h_0^2\lambda_v/k\Delta T$ (t_E – время, необходимое для полного испарения жидкости): $K^{-1} = E = k\Delta T/\rho v\lambda_v$; p – давление, ρ – плотность, v – кинематическая вязкость, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, $\Delta = \alpha^2\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $Y = (1+\alpha^2 h_x^2)^{1/2}$.

Уравнение (5) описывает поток массы (q) и его закон сохранения, уравнения (6) – (8) выражают законы сохранения энергии и двух компонент импульса: соответственно нормальной и тангенциальной.

Граничные условия (1) – (8), необходимо дополнить формулой $q = N^{-1}(T-1)$, $N = (kT_v^{3/2}/k_0 h_0 \rho^{(v)}\lambda_v^2)(2\pi r_g/M_w)^{1/2}$, ($k_0$ – коэффициент аккомодации; r_g – универсальная газовая постоянная; M_w – молекулярный вес жидкости), описывающей зависимость плотности потока массы от локальной температуры на свободной поверхности. Параметр N характеризует неравновесность поверхности испаряющейся жидкости.

Система уравнений (1) – (4) имеет стационарное решение (h_0, T_0), неустойчивое по отношению к бесконечно малым возмущениям. При этом могут возникать нелинейные волновые режимы конечной амплитуды.

Запишем решение системы (1) – (8) в виде ряда по малому параметру $\alpha << 1$:

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l Z_l, \tag{9}$$

где $Z = \{u, v, p, q, T\}$. Подставляя разложение (9) в (1) – (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α нулю, получаем систему дифференциальных уравнений. Решая ее, выразим поля скоростей и температуры через функцию $h(x, t)$. Используя далее условие (8) и ограничиваясь учетом членов до порядка α^2 включительно, для толщины расплава получаем уравнение

$$h_t = a(h) + b(h)h_x + c(h)h_{xx} +$$

$$+ d(h)h_{xxxx} + n_1(h)h_{tx} + n_2(h)h_t h_x + n_3(h)h_x^2 + n_4(h)h_x h_{xxx}, \tag{10}$$

где $a, b, c, d, n_1, n_2, n_3, n_4$ определяются формулами

$$a(h) = (1 - q_L h)/K(h + N),\ b(h) = \alpha F[(5Re/8K - 1)h^2 - ((5Re/6K)q_L - \mathrm{ctg}\theta/3)h^3],$$

$$c(h) = \alpha^2 Re[2(q_L h - 1)h^3/3\Lambda K^2(h + N)^3 - 2F^2 h^6/15 - MaPr^{-1}N(h/(h + N))^2],$$

$$d(h) = -ReW\alpha^4 h^3/3,\ n_1(h) = -5\alpha^2 ReFh^4/2,\ n_2(h) = -5\alpha^2 ReFh^4/6,$$

$$n_3(h) = -\alpha^2(9ReF^2 h^5/20 + \mathrm{ctg}\theta h^2/2),\ n_4(h) = -\alpha^2 ReWh^2.$$

Первый член в правой части (10) описывает потери массы жидкости вследствие непосредственного испарения и воздействия внешнего потока энергии. Следующие два слагаемых учитывают влияние реактивной силы пара, действующей на поверхность расплава, и термокапиллярного эффекта, четвертый член – влияние поверхностного натяжения. Последующие же слагаемые характеризуют изменение толщины жидкости за счет действия инерсионных сил.

Уравнение (10) для стационарного состояния имеет неоднородное решение $h = h_0(x)$, определяемое уравнением $b(h)h_x + a(h) = 0$. Исследуем линейную устойчивость этого решения и возможные нелинейные режимы, к которым может приводить развитие неустойчивых возмущений. Будем считать, что длина волны λ рассматриваемых периодических возмущений много меньше характерного масштаба изменения основного течения.

Представив решение (10) в виде $h = l + \xi$, где l – равновесное значение толщины, ξ – возмущение свободной поверхности, получаем

$$\hat{L}\xi = -\frac{1}{2}a_1''\xi^2 - \left(b_1'\xi + \frac{1}{2}b_1''\xi^2\right)\xi_x - \left(c_1'\xi + \frac{1}{2}c_1''\xi^2\right)\xi_{xx} - \left(d_1' + \frac{1}{2}d_1''\xi^2\right)\xi_{xxxx} + O(\xi^4), \quad (11)$$

где $\hat{L} = \partial/\partial t + a_1' + b_1\partial/\partial x + c_1\partial^2/\partial x^2 + d_1\partial^4/\partial x^4$; $(b_1, c_1, d_1, a_1', b_1', b_1'', c_1', c_1'', d_1', d_1''$ – значения a, b, c, d и их производных при $h = 1$; в дальнейшем нижний индекс у этих величин опускается).

Исследуем устойчивость решения $\xi \equiv 0$ относительно возмущений вида

$$\xi = \eta \exp[i(x - \gamma t)] + \textit{к.с.}, \quad (12)$$

где $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ – комплексный инкремент неустойчивости, γ_r – частота неустойчивости, γ_I – инкремент нарастания неустойчивости, η – амплитуда возмущений.

Подставляя (12) в линеаризованное уравнение $\hat{L}\xi = 0$, находим: $\gamma = i(a' - c + d) - b$. Отсюда

$$\gamma_r = \alpha F\left(1 + \frac{5}{6}\frac{Re}{K}\left(q_L - \frac{3}{4}\right) - \frac{\mathrm{ctg}\theta}{3}\right),$$

$$\gamma_i = \frac{2\alpha^2 Re}{3}\left[F^2/5 + (1 - q_L)/\Lambda K^2(1 + N)^3 + 3MaN/2Pr(N + 1)^2\right] -$$
$$-ReW\alpha^4/3 - (q_L N + 1)/K(N + 1)^2. \quad (13)$$

Если $\gamma_i > 0$, то возмущение нарастает со временем, если $\gamma_i < 0$, то безволновое течение устойчиво.

Для максимального инкремента и периода волны из (13) имеем

$$\gamma_{i_m} = \beta^2 Re/3W - E(q_L N + 1)/(1 + N)^2,\ d_l = 2\pi/\alpha_* = 2\pi\sqrt{W\beta^{-1}}, \quad (14)$$

где $\beta = F^2/5 + E^2(1 - q_L)/\Lambda(1 + N)^3 + 3MaN/2Pr(1 + N)^2$.

На нелинейной стадии развития неустойчивости введем набор пространственных и временных масштабов: $x_n = \epsilon^n x$, $t_n = \epsilon^n t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Разложим решение ξ и операторы в (11) в ряды по малому параметру ϵ, сохраняя члены $O(\epsilon^3)$:

$$(\hat{L}_0 + \epsilon\hat{L}_1 + \epsilon^2\hat{L}_2)(\epsilon\xi_1 + \epsilon^2\xi_2 + \epsilon^3\xi_3) = -\epsilon^2 Nl_2 - \epsilon^3 Nl_3, \quad (15)$$

где

$$\hat{L}_0 = \hat{L},\ \hat{L}_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + b\frac{\partial}{\partial x_1} + 2c\frac{\partial^2}{\partial x\partial x_1} + 4d\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial x_1},\ \hat{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 6d\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial x_1^2},$$

$$Nl_2 = \frac{1}{2}a''\xi_1^2 + b'\xi_1\xi_{1x} + c'\xi_1\xi_{1xx} + d'\xi_1\xi_{1xxxx} + n_1'\xi_{1x}\xi_{1xxx_1},$$

$$Nl_3 = \frac{1}{2}a''\xi_1\xi_2 + b'(\xi_1\xi_{2x} + \xi_1\xi_{1x} + \xi_2\xi_{1x}) + \frac{1}{2}b''\xi_1^2\xi_{1x} + c'(\xi_1\xi_{2xx} + 2\xi_1\xi_{1xx_1} +$$

$$+\xi_2\xi_{1xx}) + \frac{1}{2}c''\xi_1^2\xi_{1xx} + d'(\xi_1\xi_{2xxxx} + \xi_2\xi_{1xxxx}) + \frac{1}{2}d''\xi_1\xi_{1xxxx}.$$

Рассмотрим пространственно-периодические решения конечной амплитуды со слабой модуляцией на временах порядка $0(\epsilon^{-m})$. В качестве параметра ϵ используем порядок амплитуды первой гармоники (12).

Приравнивая коэффициенты при различных степенях ϵ в (15), получаем

$$\hat{L}_0\xi_1 = 0, \tag{16}$$

$$\hat{L}_1\xi_1 + \hat{L}_0\xi_2 = Nl_2, \tag{17}$$

$$(\hat{L}_0\xi_3 + \hat{L}_1\xi_2 + \hat{L}_2\xi_1) = Nl_3. \tag{18}$$

Решение (16) – (17) можно представить в виде различных сумм, составленных из слагаемых типа

$$\xi_1 = \eta(x_1, t_1, t_2)e^{ix} + \text{к.с.} \tag{19}$$

Из (17) с учетом условия разрешимости $\partial\eta/\partial t_1 + 2i(c - 4d)\partial\eta/\partial x_1 = 0$, для ξ_2 имеем уравнение: $c\xi_{2xx} + d\xi_{2xxxx} = -(a''/2 + ib' - c' + d')\eta^2 e^{2ix}$. Отсюда

$$\xi_2 = S\eta^2 e^{2ix}, \; S = S_r + iS_i, \; S_r = \frac{a'' + 2(c' - d')}{16(4d - c)}, \; S_i = \frac{b'}{16(4d - c)}. \tag{20}$$

Из решения (20) и секулярного условия для $O(\epsilon^3)$, имеем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_2} + i\epsilon^{-1}Q\frac{\partial\eta}{\partial x_1} - \epsilon^{-2}\sigma\eta - D\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + U\eta^2\bar{\eta} = 0, \tag{21}$$

где $D = 6d - c$, $Q = 2(c - 4d)$, $U = U_r + iU_i$, $U_r = -3b'S_i + (17d' - 5c')S_r + (1/2)(d'' - c'')$, $U_i = -3b'S_r + (17d' - 5c')S_i + (1/2)b''$.

После замены $\eta = \eta'\exp(i\phi x_1)$, $\phi = \epsilon^{-1}Q/2D$ уравнение (21) принимает вид (штрих опускаем)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_2} - \epsilon^{-2}\gamma_1\eta - D\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + U\eta^2\eta = 0, \tag{22}$$

где $\gamma_1 = \gamma + Q/4D$.

Уравнение (22) является амплитудным уравнением типа Ландау – Гинзбурга для задачи волнового стекания расплавленного металла по наклонной поверхности. Используя его, можно исследовать нелинейное поведение слоя расплава.

Оно имеет решение, соответствующее переходному режиму, $\eta = f(t_2)\exp(ikx_1)$ и выходит на конечно-амплитудное решение при $t \to \infty$

$$\eta = \epsilon^{-1}(\gamma_i/U)^{1/2}\exp(ikx_1). \tag{23}$$

Таким образом, развитие неустойчивых длинноволновых возмущений на поверхности расплава может приводить к формированию стационарно бегущих волновых режимов движения расплава. Анализируя формулы (13 – 15) заметим, что инерционные параметры (число Re) играют дестабилизирующую роль в возникновении неустойчивости, а поверхностное натяжение (число W) оказывает стабилизирующее воздействие. При малых E фазовые переходы играют стабилизирующую роль, а при больших E и $N \neq 0$ дестабилизирующая роль числа E^2 и числа Ma становится значительной. Для уравнения (11) получены стационарные пространственно-периодические решения конечной амплитуды.

Из (23) следует, что в результате эволюции волна конечной амплитуды формируется из линейных возмущений, для которых $\gamma_i > 0$, $U > 0$, то есть формирование слабонелинейных волновых режимов происходит в области линейной неустойчивости тривиального решения. Основными факторами, определяющими формирование волнового режима стекания здесь являются число Re и наличие фазового перехода на границе раздела фаз.

Авторы признательны В. С. Голубеву и А. М. Забелину за обсуждение результатов работы. Один из авторов (Ф.Х.М.) благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проект 98-02-16558).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М., Наука, 1990.

[2] Trifonov Yu., Tsvelodub O. Yu. J. Fluid Mech., **229**, 531 (1991).

[3] Мирзоев Ф. Х. Панченко В. Я., Шелепин Л. А. УФН, **166**, N 1, 3 (1996).

[4] Joo S. W., Davis S. H., Bankoff S. G. J. Fluid Mech., **230**, 117 (1991).

Поступила в редакцию 28 июня 1999 г.