Краткие сообщения по физике № 2-1987 г.

УДК 535.375

ЗАДАЧА О ПОПУТНОМ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОМ ВЫРОЖДЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА В ИНЕРЦИОННЫХ СРЕДАХ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

И.М.Бельдюгин, М.В. Золотарев, А.А. Степанов, В.А. Щеглов

В приближении заданных амплитуд опорных волн получено точное аналитическое решение задачи о попутном вырожденном четырехволновом взаимодействии коротких импульсов света в инерционных средах с нелинейной зависимостью коэффициента преломления от поля и с конечной скоростью релаксации светоиндуцированных решеток, записываемых взаимодействующими волнами.

В последние годы ведутся интенсивные исследования по четырехволновому взаимодействию (ЧВВ) лазерного излучения в газах, твердых телах и жидкостях /1–3/. Теории ЧВВ при различных механизмах нелинейности посвящено много работ (см., напр., /1, 4–6/). В отличие от них в данной работе приводится точное аналитическое решение для случая попутного вырожденного ЧВВ в инерционных средах с нелинейной зависимостью коэффициента преломления от поля (из-за специфики граничных условий в случае встречного ЧВВ такого решения получить не удается).

Рассмотрим процесс попутного вырожденного ЧВВ плоских линейно-поляризованных волн в нелинейной среде. Будем считать, что угол раскрыва конуса синхронизма не слишком велик, а его ось совпадает с направлением оси z. Комплексные (медленно меняющиеся) амплитуды опорных волн обозначим через E_1 и E_2, сигнальной волны через E_3, а обращенной через E_4. Полагая, что время прохождения области взаимодействия светом мало в сравнении с характерным временем релаксации решетки, а также пренебрегая истощением сильных опорных волн, процесс ЧВВ в инерционной среде можно описать уравнениями /2/:

$$\frac{dE_3}{dz} = i\kappa_0[E_2(\theta)\int_0^\theta E_1(\theta')E_4^*(z,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T_{14}}\right)d\theta' + E_1(\theta)\int_0^\theta E_2(\theta')E_4^*(z,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T_{24}}\right)d\theta'],$$

$$\frac{dE_4^*}{dz} = -i\kappa_0[E_2^*(\theta)\int_0^\theta E_1^*(\theta')E_3(z,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T_{13}}\right)d\theta' + E_1^*(\theta)\int_0^\theta E_2^*(\theta')E_3(z,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T_{23}}\right)d\theta'], \tag{1}$$

где κ_0 – нелинейная постоянная; T_{ij} – время релаксации решетки, записанной i-ой и j-ой волнами. Обычно $T_{ij}^{-1} = T_0^{-1} + D|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j|^2$, где T_0 – характерное время релаксации возбуждения, D – коэффициент диффузии (при учете расплывания решеток вследствие диффузии атомов из области взаимодействия), $\mathbf{k}_i$ – волновой вектор i-ой волны, $\theta = t - z/v$.

Условия синхронизма при попутном ЧВВ будут выполнены /7/, если сигнальная волна распространяется симметрично относительно опорных волн, при этом все T_{ij} оказываются одинаковыми. В этом случае, полагая $T = T_{ij}$ и $A(\theta) = E_{1,2}(\theta)$, где $A(\theta)$ – заданная функция времени, приведем (1) к виду:

$$\frac{dE_3}{dz} = \frac{i\kappa}{T} A(\theta)\int_0^\theta A(\theta')E_4^*(z,\theta)\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T}\right)d\theta',$$

$$\frac{dE_4^*}{dz} = -\frac{i\kappa}{T} A^*(\theta)\int_0^\theta A^*(\theta')E_3(z,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T}\right)d\theta', \tag{2}$$

где $\kappa = 2\kappa_0$;

$$E_3(z=0,\theta) = C(\theta), \quad E_4^*(z=0,\theta) = 0. \tag{3}$$

В граничных условиях (3) $C(\theta)$ – заданная функция времени.

Считая протяженность области взаимодействия по оси z ограниченной отрезком (0, z), для нахождения решения системы (2) используем преобразование Лапласа по z. Пусть $\varphi_k(s,\theta) = \int_0^\infty E_k(z,\theta)e^{-sz}dz$ (k = = 3, 4), тогда из (2) имеем:

$$s\varphi_3(s,\theta) = E_3(0,\theta) + \frac{i\kappa}{T} A(\theta)\int_0^\theta A(\theta')\varphi_4^*(s,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T}\right)d\theta',$$

$$s\varphi_4^*(s,\theta) = E_4^*(0,\theta) - \frac{i\kappa}{T} A^*(\theta)\int_0^\theta A^*(\theta')\varphi_3(s,\theta')\exp\left(\frac{\theta'-\theta}{T}\right)d\theta'. \tag{4}$$

Введем функции

$$f_k(s,\theta) = (1/T)\int_0^\theta A^*(\theta')\varphi_k(s,\theta')\exp(\theta'/T)\,d\theta'. \tag{5}$$

Тогда, используя (3), из (4) находим уравнение для f_4^*:

$$\frac{d^2 f^*}{d\theta^2} - \left(\frac{1}{F}\frac{dF}{d\theta}\right)\frac{df_4^*}{d\theta} - \left(\frac{\kappa F}{sT}\right)^2 f_4^* = -\frac{i\kappa}{(sT)^2} A^*(\theta)C(\theta)F(\theta)e^{\theta/T}, \tag{6}$$

где $F(\theta) = |A(\theta)|^2$. В силу (5) имеем $f_4^*(s,\theta=0) = 0$ и $df_4^*(s,\theta=0)/d\theta = 0$, поэтому, используя стандартные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /8/, находим решение уравнения (6):

$$f_4^*(s,\theta) = -(i/sT)\int_0^\theta h(\theta-\tau)\,\mathrm{sh}\,[\kappa p(\tau)/sT]\,d\tau, \tag{7}$$

где $h(y) = A^*(y)C(y)\exp(y/T)$; $p(y) = \int_0^y F(\theta')d\theta'$. Из (5) следует, что $\varphi_4^*(s,\theta) = (T/A(\theta))e^{-\theta/T}df_4^*/d\theta$, следовательно, дифференцируя (7) по времени, имеем:

$$\varphi_4^*(s,\theta) = -\frac{ie^{-\theta/T}}{sA(\theta)}\left[h(0)\,\mathrm{sh}\left(\frac{\kappa}{sT}p(\theta)\right) + \int_0^\theta \mathrm{sh}\left(\frac{\kappa p(\tau)}{sT}\right)\frac{dh(\theta-\tau)}{d\theta}d\tau\right]. \tag{8}$$

Для определения $E_4^*(z,\theta)$ осуществим обратное преобразование Лапласа функции $\varphi_4^*(s,\theta)$ и получим:

$$E_4^*(z,\theta) = -\frac{i\exp(-\theta/T)}{2A(\theta)}\Big[h(0)\,[I_0(2\sqrt{x(\theta)}) - J_0(2\sqrt{x(\theta)})] + \int_0^\theta [I_0(2\sqrt{x(\tau)}) - J_0(2\sqrt{x(\tau)})]\frac{dh(\theta-\tau)}{d\theta}d\tau\Big]. \tag{9}$$

Аналогично находим выражение для амплитуды сигнальной волны:

$$E_3(z,\theta) = C(\theta) + \frac{1}{2}A(\theta)\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)\int_0^\theta \frac{\sqrt{x(\tau)}}{p(\tau)}h(\theta-\tau)[I_1(2\sqrt{x(\tau)}) - J_1(2\sqrt{x(\tau)})]d\tau, \tag{10}$$

где $x(\tau) = \kappa p(\tau)z/T$; $I_k(y)$, $J_k(y)$ – функции Бесселя.

Формулы (9) и (10) дают полное решение задачи о вырожденном попутном ЧВВ в инерционных средах в приближении заданных амплитуд опорных волн.

Определим характерное время установления стационарного режима в случае, когда импульсы опорных и сигнальной волн имеют прямоугольную форму. При $x(\theta) = \kappa |A|^2 z\theta|T \ll 1$ поведение обращенной волны $E_4^*(z,\theta)$ хорошо аппроксимируется линейной зависимостью от θ/T. При $x \gg 1$ происходит экспоненциальный рост во времени амплитуды волны $E_4^*(z,\theta)$. Действительно, используя известные асимптотики функций Бесселя при больших аргументах, получим:

$$E_4^*(z,\theta) \approx \frac{-ie^{-\theta/T}\,h(0)}{2A\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\exp(\sqrt{2\Gamma_0 z\theta/T})}{(2\Gamma_0 z\theta/T)^{1/4}} + \frac{e^{\theta/T}}{T}\int_0^{\theta}\frac{\exp(-\tau/T+\sqrt{2\Gamma_0 z\tau/T})}{(2\Gamma_0 z\tau/T)^{1/4}}\,d\tau\right], \qquad (11)$$

где $\Gamma_0 = 2\kappa|A|^2$.

Подобные выражения описывают процессы ВКР и ВРМБ /2/, поэтому, как и для последних, из (11) получаем, что время установления при попутном ЧВВ достигается за время $\theta_y = \Gamma_0 zT/2$, а время экспоненциального нарастания равно $\Delta\theta = T/\sqrt{\Gamma_0 z}$.

В заключение отметим, что если взаимодействующие волны имеют прямоугольную форму импульсов большой длительности, то, полагая в этом случае формально $\theta \to \infty$ и раскладывая функции Бесселя в ряд, из (9) и (10) после интегрирования получаем стационарное решение системы уравнений (2)

$$E_4^*(z) = -iC\,\mathrm{sh}(\kappa|A|^2 z); \quad E_3(z) = C\,\mathrm{sh}(\kappa|A|^2 z),$$

которое совпадает с аналогичным решением для попутного ЧВВ в безынерционных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cronin–Golomb M. et al. IEEE J. Quant. Electron., **20**, № 1, 12 (1984).
2. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М., Наука, 1985.
3. Беспалов В. И., Пасманик Г. А. Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. М., Наука, 1986.
4. Belic M. R. Phys. Rev., **A31**, № 5, 3169 (1985).
5. Diels J. C., Wang W. C., Winful H. Appl. Phys., **B26**, 105 (1981).
6. Кучеров Ю. И. и др. В кн. ОВФ оптического излучения в нелинейных средах. Горький, изд. ИПФ АН СССР, 1982, с. 111.
7. Большов Л. А., Власов Д. В., Гараев Р. А. Квантовая электроника, **9**, № 1, 83 (1982).
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971.

Поступила в редакцию 28 октября 1986 г.