Краткие сообщения по физике № 2-1987 г.

УДК 534.2

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГРИБОВА–ЗИНГЕРА О ГЛОБАЛЬНОЙ КАЛИБРОВКЕ

М.А. Соловьев

Показано, что в неабелевой теории поля не только отсутствует глобальная калибровка, но невозможна и неполная глобальная калибровка, при которой остаточная группа симметрии является конечномерной группой Ли.

В /1/ Грибов показал, что в неабелевой теории поля лоренцево и кулоновское калибровочные условия являются калибровками лишь в области малых амплитуд полей. В /2/ Зингером было доказано, что глобальная калибровка в неабелевой теории вообще невозможна (при условии регулярного поведения полей на бесконечности, когда эффективно они определены на сфере, компактифицирующей пространство). Работы /1,2/ получили широкую известность и усилили интерес (см. /3/) к глобально определенным неполным калибровкам типа $A_0 = 0$ с остаточной симметрией. Естественен вопрос: может ли остаточная калибровочная симметрия сводиться к действию компактной и дискретной групп? Или, в более точных терминах, возможна ли редукция главного расслоения, определяемого на пространстве потенциалов группой калибровочных преобразований, к группе с компактной компонентой единицы? Это приводило бы к орбитам конечного объема в континуальном интеграле, что достаточно для последовательного квантования. Пример редукции такого типа дает теория струны, где компонента единицы группы диффеоморфизмов мировой поверхности стягиваема к компактной подгруппе и, следовательно, редуцируема к ней /4/. В данной статье будет показано, что группа калибровочных преобразований, напротив, не имеет гомотопического типа конечномерной группы Ли. Поэтому ответ на поставленный выше вопрос отрицателен. Это усиливает результат /1,2/ и наиболее точно, по мнению автора, характеризует ситуацию с глобальной калибровкой в неабелевой теории поля.

Калибровочную группу будем считать полупростой и обозначим через Г, группу калибровочных преобразований через G, пространство потенциалов через P. Конечномерные группы Ли для кратности назовем группами Ли. Основные сведения о гомотопических свойствах простых компактных групп Ли, к которым в силу известных разложений сводится топология групп Ли, имеются в /5,6/, более специальные – в /7–9/. В качестве области определения поля сначала рассмотрим сферу S^3, что соответствует каноническому гамильтонову формализму. В этом случае G имеет счетное число компонент, а ее центр образуют постоянные отображения $g\colon S^3 \to \Gamma$ со значениями в центре Г. Они не преобразуют потенциалы, и эффективно на P действует факторгруппа по центру $\widetilde{G}$. Все гомотопические группы G и $\widetilde{G}$, начиная со второй, совпадают. Рассмотрим также подгруппу $G(x_0) = \{ g\in G : g(x_0) = I \}$, где x_0 – полюс сферы, соответствующий бесконечности в R^3. Она нормальна в G, и

$$G/G(x_0) = \Gamma. \tag{1}$$

Справедлива формула

$$\pi_i G(x_0) = \pi_{i+3}\Gamma. \tag{2}$$

Пусть $\Gamma = SU(2)$. Тогда $\pi_2 G(x_0) = Z_2$, из чего следует, что $G(x_0)$ не имеет гомотопического типа группы Ли, ибо для любой группы Ли π_2 тривиальна. В силу теоремы Браудера можно также утверждать, что компонента единицы $G_0(x_0)$ не имеет конечного гомотопического типа. Точная гомотопическая последовательность расслоения (1)

$$\ldots \to \pi_{i+1}\Gamma \to \pi_i G(x_0) \to \pi_i G \to \pi_i \Gamma \to \ldots \tag{3}$$

при $\Gamma = SU(2)$ и $i = 3$ принимает вид:

$$Z_2 \to Z_{12} \to \pi_3 G \to Z. \tag{4}$$

Таким образом, $\pi_3 G$ содержит либо Z_{12}, либо Z_6. Значит и G, $\widetilde{G}$ не имеют гомотопического типа группы Ли, поскольку для любой группы Ли π_3 есть прямая сумма конечного числа Z. В случае $\Gamma = SU(N)$ последовательность (3) при $i = 2N - 3$ дает

$$0 \to Z_{N!} \to \pi_{2N-3} G, \tag{5}$$

поскольку /5/

$$\pi_{2N-2} SU(N) = 0, \quad \pi_{2N} SU(N) = Z_{N!}. \tag{6}$$

Данные /7–9/ о низших гомотопических группах простых компактных групп Ли показывают, что ни для одной из групп Ли π_5 не имеет подгрупп, изоморфных $Z_{4!}$, π_7, π_9, π_{11} – подгрупп, изоморфных соответственно $Z_{5!}$, $Z_{6!}$, $Z_{7!}$. Значит, G и $\widetilde{G}$ заведомо не имеют гомотопического типа группы Ли при всех $N \leqslant 7$.

Покажем теперь, как из гомотопических свойств вытекает невозможность редукции. Структуру главного расслоения на P определяют как $G(x_0)$, так и $\widetilde{G}$. Рассмотрим второе расслоение. В отличие от $G(x_0)$ группа $\widetilde{G}$ действует свободно не всюду, а почти всюду, на множестве неприводимых потенциалов $\widetilde{P}$, которое открыто, плотно в P и гомотопически тривиально /2/. Обозначим пространство орбит $\widetilde{P}/\widetilde{G}$ через B и предположим, что расслоение $(\widetilde{P}, B, \widetilde{G})$ редуцируется к (Σ, B, H). Гомотопическая последовательность расслоения обладает свойством функториальности, которое означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \pi_{i+1} B & \to & \pi_i H & \to & \pi_i \Sigma & \to & \pi_i B & \to \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \ldots \to & \pi_{i+1} B & \to & \pi_i \widetilde{G} & \to & \pi_i \widetilde{P} & \to & \pi_i B & \to \ldots \end{array} \tag{7}$$

Поскольку $\pi_i \widetilde{P} = 0$, из нижней строки следует $\pi_i \widetilde{G} = \pi_{i+1} B$, а в силу коммутативности гомоморфизм $\pi_{i+1} B \to \pi_i H$ является мономорфизмом. Поэтому циклические группы, о которых говорилось выше, войдут в $\pi_i H$, и во всех рассмотренных случаях H не может быть группой Ли.

Если пространство-время компактифицируется целиком и заменяется на S^4, то пространство калибровочных потенциалов разбивается на топологические сектора, каждому из которых соответствует своя группа калибровочных преобразований. Однако для любой из них

$$\pi_i G(x_0) = \pi_{i+4} \Gamma, \tag{8}$$

поэтому анализ аналогичен предыдущему. В случае $\Gamma = SU(2)$ имеем $\pi_2 G(x_0) = Z_{12}$, а (3) при $i = 6$ дает $Z_2 \to Z_{15} \to \pi_6 G$, т.е. $\pi_6 G$ содержит Z_{15}. Лишь для трех простых компактных групп π_6 нетривиальна: $\pi_6 SU(2) = Z_{12}$, $\pi_6 SU(3) = Z_6$, $\pi_6 G_2 = Z_3$. Поэтому для любой группы Ли π_6 не имеет подгрупп, изоморфных Z_{15}, и мы снова заключаем, что $(\widetilde{P}, B, \widetilde{G})$ не допускает редукции к группе Ли. В случае $SU(3)$ имеем $0 \to Z_{30} \to \pi_6 G$ и т.д.

Пусть Γ – любая полупростая группа Ли.

Т е о р е м а 1. В случае базы S^3 и любой полупростой калибровочной группы расслоение $P \to P/G(x_0)$ не допускает редукции к конечномерной группе Ли.

Доказательство. Какова бы ни была группа Ли, ее гомотопические группы π_i, $i \geqslant 1$ могут содержать бесконечную циклическую группу лишь при нечетных индексах /6/. Сдвиг $i \to i+3$ переводит нечетные индексы в четные, поэтому $G(x_0)$ не имеет гомотопического типа группы Ли. Этот аргумент неприменим только в том случае, когда все простые компоненты Γ локально изоморфны $SU(2)$, поскольку лишь $\pi_3 SU(2)$ содержит Z. Однако этот случай рассмотрен выше. Нередуцируемость расслоения теперь следует из свойства функториальности.

Т е о р е м а 2. В случае базы S^3 и любой полупростой калибровочной группы расслоение $\widetilde{P} \to \widetilde{P}/\widetilde{G}$ не допускает редукции к конечномерной группе Ли.

Доказательство. Выделим в G подгруппу глобальных преобразований, состоящую из постоянных отображений $S^3 \to \Gamma$. Она изоморфна Γ и пересекается с $G(x_0)$ лишь в единице. Поэтому G представляет собой полупрямое произведение $G(x_0)$ и Γ, а ее топология есть топология произведения. Подчеркнем, что здесь существенна представимость элемента $g \in G$ одной функцией; в случае S^4 для нетривиального топологического сектора это уже не так. Важен и функциональный класс, к которому принадлежит G. Известно /10/, что адекватным является класс Соболева G^p_q, где задающие индексы удовлетворяют условию $pq > n$, где n – размерность базы. При этом условии составляющие G^p_q функции непрерывны, а сходимость по топологии G^p_q влечет равномерную сходимость на S^3. С этим уточнением получаем формулу

$$\pi_i\widetilde{G} = \pi_i G(x_0) + \pi_i\Gamma, \quad i \geqslant 2,$$

и остается применить аргументацию теоремы 1.

Т е о р е м а 3. В случае базы S^4 и любой простой калибровочной группы группа $G(x_0)$ не имеет гомотопического типа конечномерной группы Ли.

Доказательство. Если Γ является исключительной группой, то $\pi_7\Gamma = \pi_3 G(x_0)$ не содержит Z /7,8/, и уже отсюда следует, что $G(x_0)$ не имеет гомотопического типа группы Ли. В случае $\Gamma = SO(N)$, $N = 2r \geqslant 8$ сдвиг $i \to i+4$ также приводит к таким бесконечным частям групп π_i, которыми не обладает ни одна из групп Ли. В случае $SO(2r+1)$ группы π_i содержат Z при $i = 3, 7, \ldots, 4r-1$, и $G(x_0)$ могла бы иметь гомотопический тип группы $SO(2r-1)$. Однако $\pi_4 SO(2r-1) \neq \pi_8 SO(2r+1)$. Могла бы она иметь и тип $Sp(r-1)$, поскольку $\pi_i Sp(r)$ содержат Z при тех же индексах. Однако данные /9/ о нестабильных гомотопических группах показывают, что $\pi_{2r-2} Sp(r-1) \neq \pi_{2r+2} SO(2r+1)$. В случае $\Gamma = Sp(r)$ рассуждение такое же. Сравнивая бесконечные части гомотопических групп, заключаем, что если $G(x_0)$ и имеет гомотопический тип группы Ли, то ею может быть лишь $Sp(r-1)$ или $SO(2r-1)$. Однако $\pi_4 Sp(r-1) \neq \pi_8 Sp(r)$ и $\pi_{2r} SO(2r-1) \neq \pi_{2r+4} Sp(r)$. Остается рассмотреть $\Gamma = SU(N)$, $N > 3$. Группы $\pi_i SU(N)$ изоморфны Z при $i = 3, 5, \ldots, 2N-1$. Поэтому если $G(x_0)$ и имеет гомотопический тип группы Ли, то это $SU(N-2)$, но $\pi_{2N-4} SU(N-2) \neq \pi_{2N} SU(N)$ ввиду (6).

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за обсуждения, которые привели к изложенным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gribov V. N. Nucl. Phys., **B139**, 1 (1978).
2. Singer I. M. Comm. Math. Phys., **60**, 7 (1978).
3. Сараджев Ф. М., Файнберг В. Я. Труды ФИАН, **165**, 3, М., Наука, 1986.
4. Соловьев М. А. Письма в ЖЭТФ, **44**, 366 (1986).
5. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. М., Наука, 1977.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М., Наука, 1984.
7. Mimura M. J. Math. Kyoto Univ., **6**, 131 (1967).
8. Kachi H. Nagoya Math. J., **32**, 109 (1968).
9. Kervaire M. A. Illinois J. Math., **4**, 161 (1960).
10. Uhlenbeck K. K. Comm. Math. Phys., **83**, 31 (1982).

Поступила в редакцию 17 ноября 1986 г.