*Краткие сообщения по физике № 1-1987 г.*

УДК 535

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АКТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Д.Ю. Кузнецов

*Производные от интегральных характеристик монохроматичного параксиального пучка в усиливающей самофокусирующей среде выражены через токи, соответствующие симметриям некоторого лагранжиана с источниками. Эти выражения позволяют контролировать адекватность приближенных вычислений.*

Приосевой монохроматичный пучок в среде с локальным откликом можно рассматривать как динамическую систему; роль времени играет пространственная координата, вдоль которой распространяется излучение /1/. При чисто рефрактивной нелинейности эта система консервативна, и уравнения поля можно получить из формализма Лагранжа. Инвариантность действия относительно определенных преобразований координат и поля позволяет строить сохраняющиеся нётеровы интегралы. /2/. Эти законы сохранения используются при исследовании устойчивости солитонов /3/, а также для контроля адекватности численных решений уравнения дифракции /4,5/. В активной среде нётеровы интегралы не сохраняются, соответствующая динамическая система неконсервативна. В настоящей работе производные от нётеровых интегралов выражаются через нётеровы токи и локальный инкремент; эти выражения дают количественную оценку искажений пространственной структуры пучка, связанных с активностью среды, и позволяют контролировать адекватность приближенных (в частности, численных) решений уравнений поля. За искажениями нётеровых законов сохранения можно проследить, используя явно эти уравнения (как, напр., в /6,7/), но естественное обобщение теоремы Нётер на случай лагранжиана с источником позволяет избежать громоздких выкладок и выразить производные от первых моментов, соответствующих глобальным симметриям системы, непосредственно через генераторы преобразований.

Будем считать, что поле в среде удовлетворяет уравнению

$$\partial E/\partial z + \Delta_{\perp} E/2ik = g(EE^*)E, \tag{1}$$

где $g$ – функция вещественного аргумента, описывающая нелинейность среды, которая может принимать комплексные значения. Для чисто рефрактивной среды $\operatorname{Re} g(I) = 0$ и уравнение (1) можно получить из лагранжиана $L_0 = iE^*E_{,o}/2 - iE^*_{,o}E/2 - E_{,j}E^*_{,j}/2k - U(EE^*)$ при $ig(I) = U' \equiv dU/dI$; здесь и далее нижний индекс после запятой обозначает дифференцирование по координатам $x_o = z, x_1, x_2$, по повторяющимся индексам производится суммирование, латинские индексы принимают значения $j = 1,2$, а греческие $\mu = 0,1,2$. Чтобы учесть усиление, рассмотрим лагранжиан $L = L_o + E^*J + EJ^*$, где источник $J$ – функция координат, ее вид мы конкретизируем позже. Для лагранжиана $L$ уравнения движения $(\partial L/\partial E^*_{,\mu})_{,\mu} = \partial L/\partial E^*$ принимают вид $iE_{,o} = -E_{,j,j}/2k + U'E - J$, что соответствует (1) при $ig(EE^*)E = U'E - J$. Пусть инфинитезимальное преобразование координат, поля и источника имеет вид

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + X_\mu(x)\delta v, \quad E(x) \to E'(x') = E(x) + \Pi(x)\delta v, \quad J(x) \to J'(x') = J(x) + G(x)\delta v,$$

где $X$, $\Pi$, $G$ – генераторы преобразования, а $\delta v$ – его параметр. Повторяя для этого случая выкладки из /2/, вариацию действия по некоторой области пространства $\delta S = \int L(E', E'_{,\mu}, J')d^3x' - \int L(E, E_{,\mu}, J)\,d^3x$ представим в виде $\delta S = \int[-T_{\mu,\mu} + (\partial L/\partial J)(G - J_{,\mu}X_\mu) + (\partial L/\partial J^*)(G^* - J^*_{,\mu}X_\mu)]d^3x\delta v$, где нётеров ток

$$T_\mu \equiv -LX_\mu - (\partial L/\partial E)(\Pi - E_{,\mu}X_\mu) - (\partial L/\partial E^*)(\Pi^* - E^*_{,\mu}X_\mu). \tag{2}$$

Таблица 1

*Преобразования, токи и их источники*

| Преобразование, сохраняющее действие $S = \int L d^3 x$ | Компонента тока $T_o$ | R | Примечание |
|---|---|---|---|
| $x'_\mu = x_\mu,\ E' = E e^{iv},\ J' = J e^{iv}$ | $I = EE^*$ | $I$ | |
| $z' = z,\ x'_j = x_j - v_j,\ E' = E,\ J' = J$ | $P_j = i(EE^*_{,j} - E_{,j}E^*)/2$ | $P_j$ | $j = 1,2$ |
| $z' = z,\ x'_j = x_j - zv_j,\ E' = Ee^{i\Phi},\ J' = Je^{i\Phi},\ \Phi = kv_j x_j + kv^2 z/2$ | $F_j = P_j z - kx_j I$ | $F_j$ | $j = 1,2$ |
| $z' = z,\ x'_1 = x_1 \cos v - x_2 \sin v,\ x'_2 = x_1 \sin v + x_2 \cos v,\ E' = E,\ J' = J$ | $M = P_1 x_2 - P_2 x_1$ | $M$ | |
| $z' = z + v,\ x'_j = x_j,\ E' = E,\ J' = J$ | $H = E_{,j}E_{,j}/2k + U(I)$ | $H + N$ | |
| $z' = (1-v)^2 z,\ x'_j = (1-v)x_j,\ E' = (1-v)^{-1}E,\ J' = (1-v)^{-3}J$ | $D = P_j x_j - 2Hz$ | $D - Nz$ | $U = -\gamma I^2/2$ |
| $x'_\mu = x_\mu/(1-vz),\ E' = (1-vz)Ee^{i\Phi},\ J' = (1-vz)^3 Je^{i\Phi},\ \Phi = vx^2/4(1-vz)$ | $Q = kx^2 I/2 - Dz - Hz^2$ | $Q + Nz^2$ | $U = -\gamma I^2/2$ |

Инвариантность действия $\delta S = 0$ влечет равенство $\int T_{\mu,\mu} d^2 x = d/dz \int T_0 d^2 x = \int [(\partial L/\partial J)(G - J_{,\mu} X_\mu) + (\partial L/\partial J^*)(G^* - J^*_{,\mu} X_\mu)] d^2 x$. В отсутствие источника ($J = 0$, $G = 0$) эта формула дает обычный закон сохранения, при его наличии получаем количественную оценку вызванных им искажений. Написанные выще формулы справедливы для источника J общего вида и, в частности, для случая $J = -i\tilde{g}E$, где инкремент $\tilde{g}$ — вещественная функция интенсивности и, может быть, координат явно; в этом случае производные от нётеровых интегралов выражаются в виде

$$d/dz \int T_0 d^2 x = \int 2\tilde{g} R d^2 x, \quad \tilde{g} = \mathrm{Re}\, g. \tag{3}$$

Для конкретных симметрий уравнения (1) вид функций R указан в табл. 1 со следующими обозначениями: $N = U'I - U - I_{,j,j}/4k$, $x^2 = x_j x_j$, $v^2 = v_j v_j$. Последние две строки в таблице относятся к случаю, когда рефрактивная нелинейность кубична; в отсутствие усиления это приводит к конформной инвариантности

а б


*Рис. 1.* а) Зависимость интегралов $\tilde{I} = \int I dx/I_o s$, $\tilde{H} = \int H dx ks/I_o$, $\tilde{P} = \int P dx/I_o$, рассчитанных по формулам (3) (сплошные кривые) и (2) (пунктир) для численного решения уравнения (1) с шагом $dz = 0{,}2ks^2$ (этот расчет выполнен на сетке из 64 узлов) для конкретной реализации исходного поля; от координаты z; б) распределения интенсивности этого поля в сечении $z = 0$ (нижняя кривая) и в сечении $z = 1{,}6ks^2$ (верхняя кривая), кружки на верхней кривой соответствуют решению на грубой сетке (64 узла, $dz = 0{,}2ks^2$).

системы. Изменение интегралов $\int T_0 d^2 x$ характеризует влияние усиления (или поглощения) на такие величины, как мощность, направление, положение, расходимость, закрученность и площадь поперечного сечения пучка. В качестве иллюстрации рассмотрим модельный пример, когда поле E, зависящее лишь от одной поперечной координаты x, распространяется в усиливающей самофокусирующей среде, $g(I) = \tilde{g}_0/(1 + I/I_0) + i\gamma I$, $\tilde{g}_0 = \mathrm{const}$, $\gamma = \mathrm{const}$, $I_0 = \mathrm{const}$. Пусть вещественное в сечении $z = 0$ поле E имеет вид несколько асимметричного колокола с характерным размером s (рис. 1). Для расчета с грубым шагом $dz = 0{,}2ks^2$ при $\tilde{g}_0 = 1/ks^2$, $\gamma = \tilde{g}_0/I_0$ аппроксимации нётеровых интегралов с помощью уравнений вида (3) представлены сплошными кривыми, а пунктир соответствует непосредственным расчетам этих интегралов по определениям (табл. 1, графа 2). Для интегралов от I, H, P отличие заметно (интеграл от F не представлен, для него относительное расхождение меньше 1%). Значения интегралов, подсчитанные с меньшим шагом ($dz \leqslant 0{,}1ks^2$, расчеты проводились также и на более подробных сетках), практически попадают на сплошные кривые, хотя сама функция E уже в сечении $z = 1{,}6ks^2$ не совсем совпадает с точным решением (рис. 1). Это указывает на то, что при расчетах интегральных характеристик пучка в нелинейной среде интегрирование выражений вида (3) может давать существенно более точные результаты, чем непосредственное вычисление нужных интегралов по приближенному распределению поля на выходе из нелинейной среды.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Alonso L. M. J. Math. Phys., **23**, 1518 (1982).
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1984.
3. Kuznetsov E. A., Turitsyn S. K. Phys. Lett., **112A**, № 6,7, 273 (1985).
4. Кандидов В. П. Изв. АН СССР, сер. физ., **48**, № 8, 1583 (1983).
5. Кузнецов Д. Ю. Препринт ФИАН № 42, М., 1986.
6. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Изв. ВУЗов, Радиофизика, **14**, № 9, 1353 (1971).
7. Suydam B. R. IEEE J. of Q.E., **QE–10**, № 11, 837 (1974).



Поступила в редакцию 11 сентября 1986 г.