

УДК 533.9

## ПЛОСКИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫЕ ОБЛАКА И ЗАРЯД ПЫЛИНОК

С. И. Яковленко

*На основе точного решения уравнения Пуассона – Больцмана в плоском случае рассмотрены свойства равновесных термоэмиссионных облаков вокруг пылевых частиц с большой плотностью заряда на поверхности. Показано, что равновесное значение зарядов пылинок существенно меньше того значения, которое при соответствующей температуре получено в экспериментах. Отмечено, что термоэмиссионная пылевая плазма в имеющихся экспериментах является переохлажденной по степени ионизации.*

Последнее время большое внимание уделяется рассмотрению пылевой плазмы, формирующейся за счет термоэмиссии электронов из пылинок [1 – 5]. При этом большой интерес представляет вопрос о равновесных распределениях электронных облаков в таких системах. При большой плотности заряда на пылинке становится справедливой плоская модель, в рамках которой можно точно решить уравнение Пуассона – Больцмана и определить равновесное распределение основного заряда в термоэлектронном облаке.

*Уравнение Пуассона – Больцмана.* Рассмотрим ситуацию, когда электронный газ над плоской поверхностью формируется за счет термоэмиссии электронов из тела при температуре  $T$ . Для нахождения распределения потенциала  $\phi$ , напряженности поля  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$  и плотности заряда  $eN_e$  следует решить уравнение Пуассона, в котором плотность заряда определяется распределением Больцмана  $N_e = N_{e1} \exp(e\phi)$ . Здесь  $N_{e1}$  – плотность электронов в тех точках, где потенциал равен нулю; учтено, что заряд электрона отрицателен. В общем случае уравнение Пуассона – Больцмана имеет вид  $\Delta\phi = 4\pi e^2 N_{e1} \exp(e\phi)$ .

Будем измерять длину в единицах  $d = 8\pi e^2/T$ . Кроме того, выберем нулевое значение потенциала в точке, где  $(8\pi e^2/T)^3 N_{e1} = 1$ . Введем безразмерные величины – потенциал  $\varphi$ , напряженность поля  $\mathbf{E}$  и плотность электронов  $n_e$  – с помощью соотношений:  $\varphi = \phi e/T$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{F}ed/T = \mathbf{F}T^2/8\pi e$ ,  $n_e = (8\pi e^2/T)^3 N_e$ . Тогда уравнение Пуассона – Больцмана в плоском случае, когда все величины зависят только от безразмерной координаты  $x$  по некоторой оси, перпендикулярной заряженной плоскости, принимает вид:  $d^2\varphi/dx^2 = (1/2)\exp(\varphi)$ ,  $E = -d\varphi/dx$ ,  $n_e = \exp(\varphi)$ .

*Граничные условия и классификация решений.* При рассмотрении такого рода задач, как для плоской, так и для сферически-симметричной геометрии, обычно выбирают граничные условия, соответствующие обращению в нуль как потенциала, так и напряженности поля в некоторой точке [4 – 6].

Однако в общем случае следует задавать плотность положительного заряда на стенке  $\sigma$ . При этом задается значение напряженности поля на стенке  $F_0 = F(x = 0)$ ,  $E_0 = E(x = 0)$ . Оно соответствует напряженности поля в плоском конденсаторе:  $F_0 = 4\pi\sigma$  или  $\sigma d^2/e = 2E_0$ . Мы здесь рассмотрим именно такую постановку задачи.

Второе граничное условие выберем в некоторой точке  $a_0$ , соответствующей нулевой напряженности поля, где заряд плоскости полностью компенсируется зарядом слоя электронов:  $E(a_0) = 0$ .

Понизим порядок уравнения Пуассона – Больцмана, рассматривая напряженность поля, как функцию потенциала:  $E dE/d\varphi = (1/2)\exp(\varphi)$ . Первое интегрирование дает связь напряженности поля с потенциалом:  $E = (\exp(\varphi) + E_1^2 - 1)^{1/2}$ . Здесь  $E_1$  – значение напряженности поля в той точке  $x = a_1$ , где потенциал равен нулю  $\varphi(a_1) = 0$ , а безразмерная плотность электронов равна единице.

Возможны три типа решений уравнения  $-d\varphi/dx = (\exp(\varphi) + E_1^2 - 1)^{1/2}$ , которым отвечают физически разные задачи. Рассмотрим их.

Когда  $E_1 > 1$ , поле нигде не обращается в нуль. Это соответствует ситуации, когда заряд плоскости не компенсирован зарядами электронов. Мы здесь этот случай рассматривать не будем.

Когда  $E_1 = 1$ , поле обращается в нуль при  $\varphi = -\infty$ . Эта ситуация соответствует электронному облаку, создаваемому одной плоскостью, причем нулевое значение поля имеет место на бесконечном расстоянии от плоскости,  $a_0 \rightarrow \infty$ .

Когда  $E_1 < 1$ , поле обращается в нуль при конечном значении потенциала  $\varphi_1 = 2\ln(1 - E_1^2)$ . Эта ситуация соответствует, например, электронному облаку, создаваемому

тому между двумя идентичными заряженными плоскостями, причем нулевое значение напряженности поля имеет место в точке  $a_0$ , соответствующей половине расстояния между этими плоскостями.

*Случай одной плоскости.* Интегрируя уравнение  $-d\varphi/dx = \exp(\varphi/2)$ , получаем:

$$\varphi(x) = 2 \ln[2E_0/(xE_0 + 2)], \quad E(x) = 2E_0/(xE_0 + 2), \quad n_e(x) = [2E_0/(xE_0 + 2)]^2.$$

Потенциал обращается в нуль, а поле и плотность электронов становятся равными единице в точке  $a_1 = 2 \cdot (1 - 1/E_0)$ , которая может лежать как слева, так и справа от заряженной плоскости.

Величина  $2/E_0$  дает характерную ширину области спада плотности электронов и напряженности поля. При большой плотности заряда на стенке слой электронов, компенсирующий этот заряд, становится узким и область основного изменения различных характеристик электронного облака можно рассматривать на основе плоской задачи даже в случае пылинки сложной геометрии. Большая плотность заряда поверхности пылинки ( $E_0 \sim 500$ ) характерна для экспериментов [1 - 3] (см. [4, 5] и ниже).

Выразим поверхностную напряженность поля  $E_0$  через термоэмиссионные характеристики. Термоэмиссионная плотность тока определяется формулой Ричардсона - Дешмана:  $j = A \exp(-b/T)$ ,  $A = 4\pi m_e e/h^3 = 120 \text{ А/см}^2$ . Здесь  $b$  - работа выхода электронов со стенки,  $h = 2\pi\hbar$  - постоянная Планка. Из условия равенства термоэмиссионного тока обратному тепловому току  $j = e(T/2\pi m_e)^{1/2} N_{e0}$  имеем плотность электронов на границе:  $N_{e0} = N(b)\vartheta^{3/2} \exp(-1/\vartheta)$ ,  $N(b) = 2(m_e b/2\pi\hbar^2)^{3/2} = 6.04 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot (b/\text{эВ})^{3/2}$ , где  $\vartheta = T/b$ . Отсюда следует безразмерное значение приповерхностной плотности электронов:  $n_{e0} = C(b)\vartheta^{-3/2} \exp(-1/\vartheta)$ ,  $C(b) = 2(m_e/2\pi\hbar^2)^{3/2} (8\pi e^2)^3 / b^{3/2} = 2.9 \cdot 10^5 (\text{эВ}/b)^{3/2}$ .

Из равенства  $n_{e0} = E_0^2$  находим значение граничной напряженности поля  $E_0 = n_{e0}^{1/2}$ , через которую, согласно полученным выше формулам, просто выражается как поверхностная плотность зарядов, так и зависимость от координаты  $x$  всех остальных величин:  $\varphi(x)$ ,  $E(x)$ ,  $n_e(x)$ .

*Случай двух плоскостей.* Интегрирование уравнения  $-d\varphi/dx = [\exp(\varphi/2) - k^2]^{1/2}$ , где  $k \equiv (1 - E_1^2)^{1/2}$ , дает:  $\varphi(x) = \ln(E^2 + k^2)$ ,  $E(x) = k \cdot \text{tg}[(a_0 - x)k/2]$ ,  $n_e(x) = (E^2 + k^2)$ . Поле обращается в нуль при  $a_0 = (2/k) \cdot \text{arctg}(E_0/k)$ . Величину  $k$  следует выбирать такой, чтобы значения  $E_0$  и  $a_0$  соответствовали заданным значениям плотности заряда на плоскости и половине расстояния между плоскостями (см. ниже). Плотность электронов в рассматриваемой области  $0 \leq x \leq a_0$  не обращается в нуль. При  $k = 1$  полученное решение соответствует большой плотности заряда на стенке  $E_0 \gg 1$ , когда потенциал и поле обращаются в нуль практически в одной точке  $a_0 = \pi$  (см. [4, 5]).

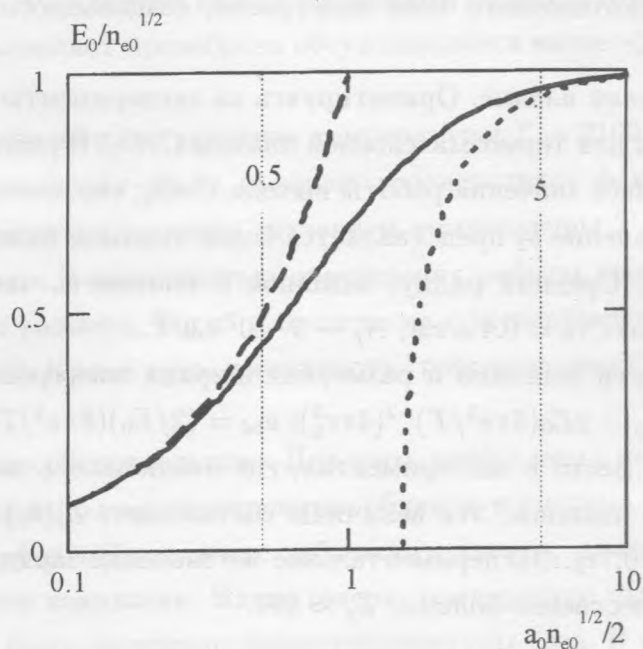


Рис. 1. Зависимость приведенной напряженности поля на стенке  $\epsilon = E_0/n_{e0}^{1/2}$  от приведенного расстояния между стенками  $\alpha = a_0 n_{e0}^{1/2}/2$ , (сплошная кривая). Пунктир соответствует приближенному выражению для больших расстояний  $\epsilon = (1 - (\pi/2\alpha)^2)^{1/2}$ , ( $\alpha \rightarrow \infty$ ); штрихи - приближенному выражению для малых расстояний  $\epsilon = \alpha$ , ( $\alpha \rightarrow 0$ ), когда электроны выдавливаются на стенки.

Зависимость поверхностной напряженности поля  $E_0$  от термоэмиссионных характеристик для двух заряженных плоскостей несколько отличается от рассмотренного выше случая одной заряженной плоскости. Используя равенство  $n_{e0} = E_0^2 + k^2$  и подставляя  $k = (n_{e0} - E_0^2)^{1/2}$  в выражение для  $a_0$ , имеем:  $\alpha = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} \arctg[\epsilon/(1 - \epsilon^2)^{1/2}]$ ,  $\alpha = a_0 n_{e0}^{1/2}/2$ ,  $\epsilon = E_0/n_{e0}^{1/2}$ . Это выражение, задает  $E_0$  как функцию, обратную зависимости  $\alpha(\epsilon)$ , см. рис. 1.

При больших расстояниях между плоскостями, когда  $\alpha \gg 1$ ,  $\epsilon(\alpha) \rightarrow 1$ , имеет место то же выражение для граничной напряженности поля, что и в случае одной плоскости  $E_0 = n_{e0}^{1/2}$ .

При малых расстояниях между плоскостями, когда  $\alpha \ll 1$ ,  $\epsilon(\alpha) \rightarrow 0$ , граничная напряженность поля (и с нею плотность заряда на стенке) стремится к нулю ( $E_0 \rightarrow 0$  при  $a_0 \rightarrow 0$ ). Плоскости как бы выдавливают электроны на стенки.

Значение  $a_0 = a_{bd}$ , разделяющее эти области зависимостей  $E_0$  от  $a_0$ , равно эф-

фактивной ширине пристеночного слоя электронов, создаваемого одной плоскостью:  
 $a_{bd} = 2/E_0 = 2n_{e0}^{-1/2}$ .

Применение к пылевой плазме. Ориентируясь на эксперименты [1 – 3], рассмотрим характерные величины для термоэмиссионной плазмы  $CrO_2$ . В работах [2, 3] приведены несколько различающиеся значения работы выхода  $CrO_2$ ; соответственно,  $b_1 = 2.75$  эВ и  $b_2 = 2.1$  эВ. Хотя значение  $b_2$  представляется более точным, ниже даны зависимости для обоих значений  $b$ . Средний радиус пылинок и плотность числа пылинок имели значения соответственно,  $r_0 = 0.4$  мкм,  $N_p \sim 5 \cdot 10^7$  см<sup>-3</sup>.

Заряд на поверхности пылинки и размерная ширина электронного слоя определяются выражениями:  $Z_p = 2E_0(8\pi e^2/T)^{-2}(4\pi r_0^2)$ ;  $a_{bd} = (2/E_0)(8\pi e^2/T)$ . При температуре  $T = 1700$  К, имевшей место в экспериментах, где наблюдалось некоторое упорядочивание в расположении пылинок, эти величины составляют:  $Z_p(b_1) \approx 13$ ,  $Z_p(b_2) \approx 115$ ;  $a_{bd}(b_1) \approx 7r_0$ ,  $a_{bd}(b_2) \approx 0.7r_0$ . Экспериментальное же значение заряда пылинки при этой температуре было существенно больше:  $Z_p \approx 500$ .

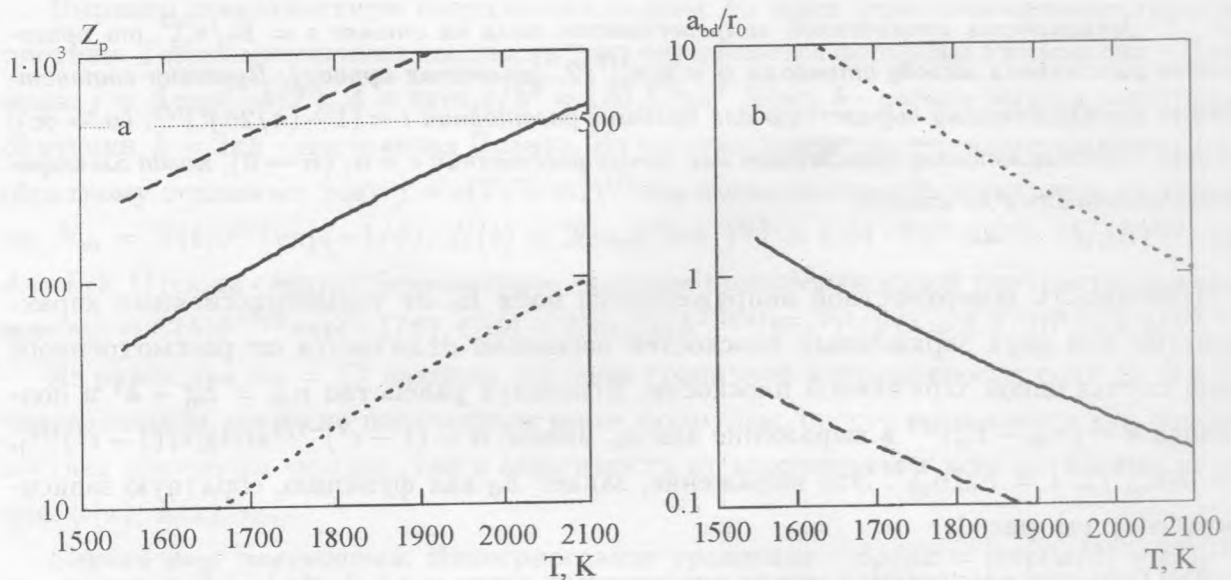


Рис. 2. Зависимости заряда частицы (а) и отношения толщины слоя к радиусу частицы (б) для различных значений  $b$ : сплошная кривая  $b = 2.1$  эВ; пунктир –  $b = 2.75$  эВ; штрихи –  $b = 1.7$  эВ.

Рассмотрение зависимостей  $Z_p$  и  $a_{bd}$  от температуры (см. рис. 2) показывает, что в термодинамическом равновесии экспериментальное значение заряда пылинки  $Z_p \approx 500$ , для которого применима плоская модель, достигается лишь при  $T = 2100$  К. При

этом  $a_{bd}(b_2) \approx 0.17r_0$ . Расстояние между пылинками во всех случаях достаточно велико,  $N_p^{-1/3} \approx 70r_0$ , что позволяет пренебречь обсуждавшимся выше эффектом выдавливания электронов.

Существенно более высокое значение температуры  $T = 2100 K$ , при которой в термодинамическом равновесии заряд пылинок соответствует фактически имеющемуся, по сравнению с экспериментальным значением температуры  $T = 1700 K$  для того же заряда, можно связать с неточностью определения работы выхода для "гофрированных" частиц малого размера. Тогда для согласия с экспериментами следует положить  $b = 1.7 \text{ эВ}$  (см. рис. 2). Кроме того, поверхность "гофрированной" пылинки превосходит величину  $4\pi r_0^2$ .

Отметим еще одно обстоятельство. Для того, чтобы заряд пылинки не был практически полностью экранирован электронным облаком и система пылинки-газ вела себя как плазма, а не набор нейтральных дебаевских атомов, плазма должна быть переохлаждена по степени ионизации. Иначе говоря, температура пылинок, эмиттирующих электроны, должна быть несколько выше температуры газа. В пользу этого предположения косвенно свидетельствует и тот факт, что рассмотрение баланса термоэмиссии и тройной рекомбинации [4] приводит к разумным значениям заряда пылинки (при  $T = 1700 K$ ,  $Z_p \approx 230$  для  $b = 2.75 \text{ эВ}$ ;  $Z_p \approx 410$ , для  $b = 2.1 \text{ эВ}$  и  $Z_p \approx 520$  для  $b = 1.7 \text{ эВ}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фортов В. Е., Нефедов А. П., Петров О. Ф. и др. ЖЭТФ, **111**, N 2, 467 (1997).
- [2] Фортов В. Е., Филинов В. С., Нефедов А. П. и др. ЖЭТФ, **111**, N 3, 889 (1997).
- [3] Нефедов А. П., Петров О. Ф., Ходатаев Я. К., Храпак С. А. ЖЭТФ, **115**, N 3, 837 (1999).
- [4] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. Препринт ИОФАН N 8, М., 1997.
- [5] Ткачев А. Н., Яковленко С. И. ЖТФ, **69**, N 1, 53 (1999).
- [6] Gibson E. G. Phys. Rev., **9**, N 12, 2389 (1966).