*Краткие сообщения по физике № 5-1987 г.*

УДК 539.171

# О СЕЧЕНИИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НА СИЛЬНОПОГЛОЩАЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

В.И. Беляк

*Получены квазиклассические выражения для сечения упругого рассеяния на реалистических адрон-ядерных сильнопоглощающих оптических потенциалах. Отмечен эффект затухания осцилляций сечения с ростом углов рассеяния.*

Для описания рассеяния адронов на ядрах можно воспользоваться моделью оптического потенциала. При этом в случае достаточно сильного поглощения и квазиклассичности задачи основную роль начинают играть "хвосты" потенциалов. Так в /1/ пион-ядерное рассеяние в области $\Delta_{33}$-резонанса описывалось в предположении, что оно происходит на экспоненциальном "хвосте". В /2/ вычислялась амплитуда рассеяния вперед на потенциале, "хвост" которого представлялся в виде разложения по степеням экспоненты. В настоящей работе вычисляется амплитуда рассеяния на сильнопоглощающем потенциале с таким же размытием края, как и в /2/.

Будем описывать рассеяние волновым уравнением $[\nabla^2 + k^2 n^2(r)]\Psi(r) = 0$, где $n(r) = [1 - u(r)]^{1/2}$ – показатель преломления; $u(r)$ – эффективный безразмерный потенциал, зависящий от волнового числа k и связанный соответствующим образом с оптическим потенциалом. Предположим, что $u(r)$ в области краевых $r > R$ разлагается в ряд по степеням экспоненты

$$u(r) = -\bar{u} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n \exp\left(-n\,\frac{r-R}{a}\right), \quad A_1 = 1, \quad |A_n| \sim 1. \tag{1}$$

Для потенциала Вудса – Саксона $A_n = 1$. Положим

$$kR \gg 1, \quad a/R \ll 1, \quad \operatorname{Im} q(R) \gg 1, \quad q(b) = k\bar{u}\,(ab)^{1/2}. \tag{2}$$

Условие (2) на $q(R)$ означает наличие сильного краевого поглощения.

Амплитуду рассеяния $f(\theta) = (i/k) \sum\limits_{l=0}^{\infty} (l + 1/2)[1 - \exp(2i\delta_l)]P_l(\cos\theta)$ вычислим в приближении типа квазиклассического. Суммирование в $f(\theta)$ заменим на интегрирование, положим $P_l(\cos\theta) \approx (\theta/\sin\theta)^{1/2} \times J_0((l + 1/2)\theta)$ и произведем интегрирование по частям. При этом

$$f(\theta) = ik(\theta/\sin\theta)^{1/2} \int_0^{\infty} (b/\kappa)J_1(\kappa b)\, 2i\delta'(b) \exp[2i\delta(b)]\, db, \quad \kappa = k\theta, \quad b = (l + 1/2)/k, \quad \delta(b) \equiv \delta_l. \tag{3}$$

В обычном эйкональном формализме $\theta \ll 1$, множитель $(\theta/\sin\theta)^{1/2}$ опускается, а $\kappa$ заменяется на $2k\sin(\theta/2)$ или на $k\sin\theta$. В случае (1), (2) существенный вклад в (3) дают b, для которых $|\delta(b)| \lesssim 1$, $b > R$. При этом $f(\theta)$, используя метод /3/, можно свести к интегралу по линии наибыстрейшего спада $\exp[2i\delta(b)]$, исходящей из $+\infty$, а затем записать в виде

$$f(\theta) = ik(\theta/\sin\theta)^{1/2} \int_0^{\infty} (b/\kappa)J_1(\kappa b)\exp(-t)\,dt, \quad t = -2i\delta(b). \tag{4}$$

Квазиклассические фазы $\delta(b)$ $(b > R)$ вычислим, разлагая их по степеням $\bar{u}$, $u(r) \propto \bar{u}$ (первый член этого разложения соответствует эйкональному приближению) и используя разложение (1) для $u(r)$. При этом

$$\delta(b) = \delta(b)^{(0)}\left\{[1 + (3/8)(a/b) + ...] + \omega(b)\, 2i\delta(b)^{(0)} + ...\right\}, \quad \delta(b)^{(0)} = \sqrt{\pi/8}\; q(b) \exp[-(b-R)/a],$$

$$\omega(b) = (i/\sqrt{\pi})[A_2/q(b) - (1/2)\eta(b)], \quad \eta(b) = (1/ka)(b/a)^{1/2}.$$

В выражении для $\delta(b)$ помимо основного члена приведены первые поправки (нэйкональная $\sim \eta(b)\,\delta(b)^{(0)}$ и от неэкспоненциальности края потенциала $\sim (1/q(b))\,\delta(b)^{(0)}$) с пренебрежением в этих поправках величинами $\sim a/b$. Из уравнения для $b(t)$ в (4) с учетом величин $\sim (a/R)^2$ и $\sim (a/R)|\omega^2|$ ($|\omega| \sim (\eta + |1/q|)$) имеем

$$b(t) = b_2 - \overline{a}(\ln t + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + ...), \quad \omega_1 = \omega + \Delta\omega_2, \quad \overline{a} = a(1 + a/2\mathrm{Re}\,b_1),$$
$$b_1 = R + a\ln(\sqrt{\pi/2}\, q(R)/i), \quad b_2 = b_1 + (\overline{a}/2)\ln(b_1/R) + (3/8)(a^2/b_1). \tag{5}$$

Для поправочных членов типа $\omega(b)$, $\eta(b)$, $1/q(b)$ используется обозначение $\omega(\mathrm{Re}\,b_2) \equiv \omega$, $\eta(\mathrm{Re}\,b_2) \equiv \eta$ и т.п. В $b(t)$ включены также величины $\Delta\omega_2$, $\omega_2$, соответствующие поправкам второго порядка (квадратичным по параметрам разложения $\eta$ и $1/q$):

$$\Delta\omega_2^{(1)} = 0, \quad \omega_2^{(1)} = (2/\pi)[(1/\sqrt{3})A_3 - (3/4)A_2^2]/q^2 + c[-A_2\eta/q + (1/4)\eta^2];$$
$$\Delta\omega_2 = -(1/8)\eta^2, \quad \omega_2 = \omega_2^{(1)} + (1/24)\eta^2; \quad c \equiv \sqrt{3}/\pi - 3/2\pi. \tag{6}$$

Здесь $\Delta\omega_2^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$ получаются при использовании первого квазиклассического приближения для $\delta(b)$; $\Delta\omega_2$, $\omega_2$ включают дополнительные нэйкональные поправки второго порядка, соответствующие формализму /4/. Требуется дальнейшее изучение этих поправок, в частности, с последовательным использованием высших квазиклассических приближений. (В угловые распределения (7) $\omega_1$ и $\omega_2$ входят как параметры.) Из (4), (5) с учетом величин $\sim (a/R)$, $(a/R)(\kappa a)$ и $\sim (a/R)|\omega^2|$, $(\kappa a)^n|\omega^2|$ ($n \geqslant 1$) получим:

$$f(\theta) = (ik/2\kappa)(\theta/\sin\theta)^{1/2} g(\kappa)\left\{b_+ H_1^{(2)}(\kappa b_+)\exp[i\kappa(b_+ - b_{ef})] + b_- H_1^{(1)}(\kappa b_-)\exp[-i\kappa(b_- - b_{ef})]\right\},$$
$$b_{ef} \equiv b_{ef}(\kappa) = b_2 - \arg\Gamma(1 + i\kappa\overline{a})/\kappa - \overline{a}\Omega_b, \quad b_\pm = b_2 - \overline{a}\Psi(1 \pm i\kappa\overline{a}) - \overline{a}\Omega_b,$$
$$g(\kappa) = (\pi\kappa\overline{a}/\mathrm{sh}\,\pi\kappa\overline{a})^{1/2}\exp[-(\kappa\overline{a})^2\Omega_g], \quad (\kappa\overline{a})^2\Omega_g = (1/2)(\varphi_+ + \varphi_-),$$
$$(\kappa\overline{a})\Omega_b = (i/2)(\varphi_+ - \varphi_-), \quad \varphi_\pm = (1 \pm i\kappa\overline{a})\ln(1 \mp i\kappa\overline{a}\omega_1) \mp i\kappa\overline{a}\omega_2(1 \pm i\kappa\overline{a})(2 \pm i\kappa\overline{a}). \tag{7}$$

Здесь $H_1^{(1,2)}(z)$ – функции Ханкеля, $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Для $\Omega_{b,g}$ можно ограничиться квадратичным приближением по $\eta$, $1/q$

$$\Omega_{b,g} = \omega + \Delta\Omega_{b,g}, \quad \Delta\Omega_b = \Delta\omega_2 + 2\omega_2 - (1/2)(\kappa\overline{a})^2(\omega^2 + 2\omega_2), \quad \Delta\Omega_g = \Delta\omega_2 + (1/2)\omega^2 + 3\omega_2.$$

Приведем явное выражение $\Delta\Omega_{b,g}$, соответствующее (6) (члены $\propto 1/q^2$ не выписываем далее):

$$\Delta\Omega_b = -[\nu_b + \nu_b'(\kappa\overline{a})^2]\eta^2 - 2cA_2(\eta/q)[1 + (1/\sqrt{3})(\kappa\overline{a})^2], \quad \Delta\Omega_g = \nu_g[\eta^2 - 4A_2\eta/q],$$
$$\nu_b = 1/24 - c/2, \quad \nu_b' = 1/24 - c/2\sqrt{3}, \quad \nu_g = (3\sqrt{3} - 5)/4\pi, \quad \nu \sim 0{,}01. \tag{8}$$

При $\kappa R \gg 1$ в пренебрежении величинами $\sim 1/\kappa R$ (7) приобретает вид:

$$f(\theta) = ik[(b_+ + b_-)/\pi\kappa^3]^{1/2}(\theta/\sin\theta)^{1/2} g(\kappa)\sin(\kappa b_{ef}' - \pi/4), \quad b_{ef}' = b_{ef} + (\overline{a}/2\kappa b_2)\mathrm{Im}\,\Psi(1 + i\kappa\overline{a}).$$

В пренебрежении величинами $\sim (a/R)\min(1, \kappa a)$ (7) сводится к

$$f(\theta) = (ikb_{ef}/\kappa)g(\kappa)J_1(\kappa b_{ef}). \tag{9}$$

В (9) можно заменить $b_{ef}$ на $b'_{ef}$; при этом $f(0)$ совпадает с результатом /2/ даже при учете величин $\sim (a/R)^2$. Сечение упругого рассеяния $|f(\theta)|^2$ выпишем при $\kappa R \gg 1$ в пренебрежении величинами $\sim 1/\kappa R$, исходя для простоты из (9):

$$\begin{gathered}
|f(\theta)|^2 = (2k^2 \operatorname{Re} b_{ef}/\pi\kappa^3)|g(\kappa)|^2 [\operatorname{sh}^2(\kappa \operatorname{Im} b_{ef}) + \sin^2(\kappa \operatorname{Re} b_{ef} - \pi/4)], \\
\operatorname{Im} b_{ef} = -\overline{a}(\xi + \operatorname{Im}\Omega_b) = -\overline{a}\left\{\xi + |A_2/\sqrt{\pi}q|\sin\widetilde{\xi} - (\eta/2\sqrt{\pi})[1 - 4\sqrt{\pi}c|A_2/q|(1 + (\kappa\overline{a})^2/\sqrt{3})\cos\widetilde{\xi}]\right\}, \\
\operatorname{Re} b_{ef} = \operatorname{Re} b_2 - \arg\Gamma(1 + i\kappa\overline{a})/\kappa - \overline{a}\operatorname{Re}\Omega_b, \quad \widetilde{\xi} = \xi + \arg A_2, \quad \xi = \arg(i/\overline{u}), \quad |\xi| \leqslant \pi/2
\end{gathered} \tag{10}$$

($\operatorname{Re} b_2$ отличается от $b_2$ заменой $q(R)/i$ на $|q(R)|$).

Полученные результаты являются обобщением /1/. При этом величина $\kappa a$ не считается малой и учитываются поправки от неэкспоненциальности и неэйкональности края потенциала. Эти поправки дают в $f(\theta)$ вклады $\sim |1/q|\max[a/R, (\kappa a)^{1;2}]$ и $\sim \eta\max[a/R, (\kappa a)^{1;2}]$, параметрами их разложения являются $|1/q|$, $|1/q|(\kappa a)$ и $\eta$, $\eta\kappa a \approx \theta(R/a)^{1/2}$. Из-за мнимости основного неэйконального члена $\propto \eta$ в $\Omega_{b,g}$ его вклад в $|f(\theta)|^2$, порождаемый $\operatorname{Im} b_{ef}$, уменьшен до $\sim \max[|\xi|\eta, \eta^2]\cdot\max[(a/R)^2, (\kappa a)^2]$ и только при $|\xi|\kappa a \gtrsim 1$ имеет порядок $\eta\kappa a$. Квадратичные по $\eta$ члены в $\Omega_{b,g}$ дают в $f(\theta)$ и $|f(\theta)|^2$ через посредство $\operatorname{Re} b_{ef}$, $|g(\kappa)|$ вклад $\sim \eta^2\max[(a/R)\ \ , (\kappa a)^n]$ $(n = 1, 2, 3)$, который подавлен за счет численных коэффициентов (8) и практически мал вплоть до $\eta \lesssim 1$, $\kappa a \lesssim 1$*. В пренебрежении поправками $\propto \eta$, $1/q$ (основное приближение) амплитуда $f(\theta)$ описывает рассеяние на экспоненциальном "хвосте" потенциала в эйкональном приближении.

Полученная амплитуда $f(\theta)$ имеет дифракционный характер. Эффективный дифракционный радиус можно определить как $R_{ef} = \operatorname{Re} b_{ef}(0)$; $R_{ef} = \operatorname{Re} b_2 + \overline{a}[\gamma - |A_2/q|((1/\sqrt{\pi})\cos\widetilde{\xi} - 2c\eta\sin\widetilde{\xi}) + \nu_b\eta^2]$, $\gamma = 0{,}5772$. Радиус $R_{ef}$ оказывается больше R на существенную величину $\sim (a/R)\ln|q(R)|$ в основном приближении (что соответствует рассеянию на "хвосте" потенциала). Поправки дают в $R_{ef}$ вклады $\sim (a/R)|1/\ q|$ и $\sim (a/R)\eta^2 \approx 1/(ka)^2$, причем неэйкональный вклад подавлен за счет численного коэффициента. От дифракционной амплитуды рассеяния на черном диске радиуса $R_{ef}$ амплитуда (9) отличается множителем $g(\kappa)$ и тем, что величина $[b_{ef}(\kappa) - R_{ef}] \sim a \neq 0$ и комплексна. Эти отличия приводят к следующим эффектам в сечении $|f(\theta)|^2$.

1. Уменьшение $\operatorname{Re} b_{ef}$ с ростом $\theta$ ведет к смещению экстремумов сечения из положений, определяемых $\kappa R_{ef}$. В основном приближении $(\operatorname{Re} b_{ef} - R_{ef})\kappa = -\kappa\overline{a} + \operatorname{arctg}\kappa\overline{a} - 0{,}067(\kappa\overline{a})^3 + \ldots$ при $\kappa\overline{a} < 2$. Поправки, соответствующие (8), дают в $\kappa(\operatorname{Re} b_{ef} - R_{ef})$ вклад $\sim |\omega^2|(\kappa a)^3$, причем, как правило (например, для потенциала Вудса – Саксона с $\operatorname{Im}\overline{u} \geqslant \operatorname{Re}\overline{u} \geqslant 0$), противоположного основному вкладу знака.

2. Множитель $|g(\kappa)|^2$ ведет к экспоненциальному затуханию сечения с ростом $\theta$. В основном приближении $|g(\kappa)|^2$ спадает как $\exp(-\pi\kappa\overline{a})$. Поправки дают в этот эффект вклады $\sim |1/q|(\kappa a)^2$, $\eta^2(\kappa a)^2$, как правило, усиливая его.

3. Наличие $\operatorname{Im} b_{ef}$ приводит к заполнению минимумов сечения и к появлению неосциллирующей части сечения $\propto \operatorname{sh}^2(\kappa \operatorname{Im} b_{ef}) \approx \operatorname{sh}^2[(\xi - \eta/2\sqrt{\pi})(\kappa\overline{a})]$ (10), относительный вклад которой возрастает с ростом $\theta$ как $\exp[|2\xi - \eta/\sqrt{\pi}|(\kappa\overline{a})]$. В этот эффект входит первая неэйкональная поправка. (Поправка $\propto (1/q)$ в наиболее интересном случае $\arg A_2 = 0$ лишь увеличивает на величину $\sim |1/q|$ вклад вещественной части потенциала $\propto \xi$.)

* Для рассеяния нуклонов на ядрах с массовым числом A $\eta(R) \approx 9A^{1/6}[E(1 + E/2m_N)]^{-1/2}$, E и $m_N$ – в мегаэлектронвольтах.

Таким образом, сечение затухает с ростом $\theta$ как $\exp[(-\pi + |2\xi - \eta/\sqrt{\pi}|)(\kappa\overline{a})]$, а его осциллирующая часть как $\exp(-\pi\kappa\overline{a})$, т.е. при $|2\xi - \eta/\sqrt{\pi}| \sim 1$ быстрее, чем сечение в целом. Эффект затухания осцилляций сечения порождается вещественной частью потенциала ($|2\xi| = \pi$ в предельном случае чисто вещественного потенциала) и неэйкональностью задачи, причем вклады от этих факторов вычитаются (складываются) при $\mathrm{Re}\,\overline{u} > 0$ ($\mathrm{Re}\,\overline{u} < 0$).

Полученные выражения для сечения упругого рассеяния применимы при анализе рассеяния пионов, каонов, антинуклонов на ядрах в случае сильного поглощения.

Автор благодарит Г.М. Ваградова за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson M. B., Bethe H. A. Comments Nucl. Part. Phys., 8, 75 (1978); Germond J. F., Johnson M. B. Phys. Rev., C 22, 1622 (1980).
2. Беляк В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 12, 43 (1986).
3. Беляк В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 31 (1976).
4. Wallace S. J. Ann. Phys., 78, 190 (1973).

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию 31 декабря 1986 г.

Примечание

В предэкспоненциальный множитель подынтегрального выражения f(0) /2/, аналогично формуле (3) настоящей работы, входит $\delta'(b)$.