

О РАЗВИТИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЦ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Е.Г. Гамалий, И.Г. Лебо, В.Б. Розанов, Г.М. Сергоян

В линейном приближении получена система уравнений, описывающая поведение малых возмущений формы границ оболочки из несжимаемой жидкости. С помощью численных решений исследована эволюция возмущений границ при различных режимах движения оболочки.

Динамика несжимаемой жидкости в отсутствие диссипативных механизмов описывается следующей системой уравнений:

$$\Psi = \text{grad} V, \quad \Delta \Psi = 0, \quad \text{grad}(\partial \Psi / \partial t + V^2 / 2 + P / \rho_0) = 0. \quad (1)$$

Здесь Ψ — потенциал скорости; V, P, ρ_0 — скорость, давление и плотность жидкости. Движение сферической оболочки, заполненной газом (давление газа изменяется по адиабатическому закону $P^{\text{int}} = P_0 [R_1^0 / R_{01}(t)]^5$, а плотность газа $\rho_g = \rho_{0g} [R_1^0 / R_{01}(t)]^3$), под действием внешнего давления P^{ext} можно описать с помощью следующего уравнения:

$$\frac{dV_{01}}{dt} = - \frac{V_{01}^2}{R_{01}} \left[2 - \frac{1}{2} \frac{1 - Z^4(t)}{1 - Z(t)} \right] - \frac{P^{\text{ext}} - P^{\text{int}}}{\rho_0 R_{01}} \frac{1}{1 - Z(t)}. \quad (2)$$

Здесь $Z(t) = R_{01} / R_{02}$; $R_{01}(t), R_{02}(t)$ — внутренний и внешний радиусы границ невозмущенной оболочки; $V_{01}(t)$ — радиальная скорость внутренней границы. Линеаризуем уравнения системы (1):

$R_{1(2)}(\theta, \varphi, t) = R_{01(2)}(t) + \Delta_{1(2)}(\theta, \varphi, t)$, $|\Delta_{1(2)} / R_{01(2)}| \ll 1$, $V_{1(2)} = V_{01(2)} e_r + (v_r, v_\theta, v_\varphi)$, $\Psi = \Psi_0(r, t) + \Psi(r, \theta, \varphi, t)$, $P = P_0(r, t) + p(r, \theta, \varphi, t)$. Система уравнений для амплитуд возмущений границ имеет вид:

$$p_n|_{R_{01(2)}} = -\rho_0 \frac{d\Psi_n}{dt}|_{R_{01(2)}}, \quad (3)$$

$$d\Delta_{n1(2)} / dt = \Delta_{n1(2)} \frac{\partial V_{01(2)}}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial r}|_{R_{01(2)}},$$

где n — номер сферической гармоники. На внутренней границе:

$$P(R_{01} + \Delta_1) - P_0(R_{01}) = \Delta_1 \frac{\partial P}{\partial r}|_{R_{01}} + p = -\rho_g \Delta_1 \frac{dV_{01}}{dt}, \quad (4)$$

откуда $p = -\Delta_1 (\rho_g - \rho_0) dV_{01} / dt$. Полагаем, что вне оболочки газа нет. Потенциал скорости можно представить в виде $\Psi_n = A_n(t) r^n + B_n(t) r^{-(n+1)}$. Тогда из (3) с учетом (4) получаем систему уравнений, описывающих эволюцию возмущений:

$$\frac{d^2 \Delta_{n1}}{dt^2} = -\frac{3V_{01}}{R_{01}} \frac{d\Delta_{n1}}{dt} + \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_0}\right) \frac{1}{R_{01}} \frac{dV_{01}}{dt} \frac{n-1 + (n+2)Z^{2n+1}}{1-Z^{2n+1}} \Delta_{n1} +$$

$$+ (2n+1) \frac{V_{01}}{R_{01}} \frac{d\Delta_{n2}}{dt} \frac{Z^{n-1}(1-Z^3)}{1-Z^{2n+1}} - (2n+1) \frac{1}{R_{01}} \frac{dV_{01}}{dt} \frac{Z^{n+2}}{1-Z^{2n+1}} \Delta_{n2}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \Delta_{n2}}{dt^2} = -\frac{3V_{02}}{R_{02}} \frac{d\Delta_{n2}}{dt} - \frac{1}{R_{02}} \frac{dV_{02}}{dt} \frac{n+2 + (n-1)Z^{2n+1}}{1-Z^{2n+1}} \Delta_{n2} +$$

$$+ (2n+1) \frac{V_{01}}{R_{01}} \frac{Z^{n+2}(1-Z^3)}{1-Z^{2n+1}} \frac{d\Delta_{n1}}{dt} + (2n+1) \left[\frac{1}{R_{01}} \frac{dV_{01}}{dt} + 2 \frac{V_{01}^2}{R_{01}^2} (1-Z^3) \right] \frac{Z^{n+2}}{1-Z^{2n+1}} \Delta_{n1}.$$

Уравнения (2), (5) можно обезразмерить с помощью масштабных величин $R_1^0, t^0 = R_1^0/V_1^0$ (здесь R_1^0, V_1^0 — радиус и скорость внутренней границы в момент времени $t = 0$) и P_0 — начального давления газа в оболочке. В отсутствие внешнего давления P^{ext} решение системы для фиксированного n зависит от соотношения двух безразмерных параметров $\beta = E_{in}^0/E_{kin}^0$ (где E_{in}^0 — внутренняя энергия газа, E_{kin}^0 — кинетическая энергия оболочки) и $A_S^0 = R_2^0/(R_2^0 - R_1^0)$ — аспектного отношения оболочки при $t = 0$ (в дальнейшем плотностью газа будем пренебрегать, считая $\rho_g/\rho_0 \ll 1$). Уравнения (2), (5) решались численно (программа "РУНО"). Ниже представлены основные результаты.

Развитие неустойчивости в оболочке конечной толщины при отсутствии внешнего давления. Характер поведения возмущений в оболочке,двигающейся с постоянной энергией ($\beta = 0$), зависит от соотношения параметров $n, R_{01}(t), d(t) = R_{02}(t) - R_{01}(t)$. Для возмущений с большими n , когда выполняется условие $nd/R_{01} \gg 1$, оболочка — "толстая", и в процессе имплозии возмущения осциллируют со слабо нарастающей амплитудой $/2,3/$. В случае $nd/R_{01} < 1$, "поперечный масштаб возмущений" $\lambda_p \sim R_{01}/n > d$, т.е. оболочка "тонкая". В случае бесконечно тонкой оболочки возмущения могут нарастать как $\sim R_{01}^{-3}/4,5/$. В процессе имплозии толщина оболочки нарастает с уменьшением радиуса. Поэтому возмущения с фиксированным n на начальной стадии могут вести себя, как в случае "тонкой" оболочки, а на конечной стадии — как в случае "толстой". Численные расчеты подтверждают сделанный вывод.

Рассмотрим случай торможения оболочки газом. В $/3/$ изучалась задача о развитии возмущений границы пузырька в жидкости (случай бесконечно толстой оболочки), и было показано, что при торможении границы возмущения с $n \gg 1$ нарастают согласно закону Тейлора $/4/$, т.е.

$$\Delta_{n1} \sim \exp \int^t [g(t')n/R_{01}(t')]^{1/2} dt', \quad (9)$$

где $g(t)$ — текущее значение ускорения (торможения) границы.

Была проведена серия расчетов для различных значений A_S^0 и β при начальных условиях: $\Delta_{n1}^0 = 10^{-4}$, $\Delta_{n2}^0 = 0$, $\dot{\Delta}_{n1} = \dot{\Delta}_{n2} = 0$. На рис. 2 представлены результаты расчетов для случая $A_S^0 = 200, \beta = 0,09$. Параметры выбраны так, чтобы торможение начиналось с момента $t = 0$. Показаны зависимости относительной амплитуды возмущения внутренней границы и амплитуды внешней границы на момент максимального сжатия. Из расчетов следует, что $R_{01 \min} \cong R_1^0 \sqrt{\beta/(1+\beta)}$ (в случае бесконечно толстой оболочки легко показать, что это равенство строгое). Из рис. 1 видно, что при $n \lesssim 50$ зависимость Δ_{n1} от n отличается от предсказываемой в (9). Связано это с влиянием конечной толщины оболочки. При $n \lesssim 35$ Δ_{n1} вначале слабо нарастает, затем уменьшается до 0, меняет знак и увеличивается по абсолютной величине вплоть до значений, которые показаны на рисунке. При $n > 50$ (случай "толстой" оболочки $nd/R_{01} > 1$) возмущения (Δ_{n1}) нарастают с $t = 0$. Диапазон значений с n от 35 до 50 является промежуточным случаем. Возмущения на внешней границе (Δ_{n2}) осциллируют в процессе движения оболочки, причем чем больше n , тем с меньшей относительной амплитудой передаются возмущения на внешнюю границу.

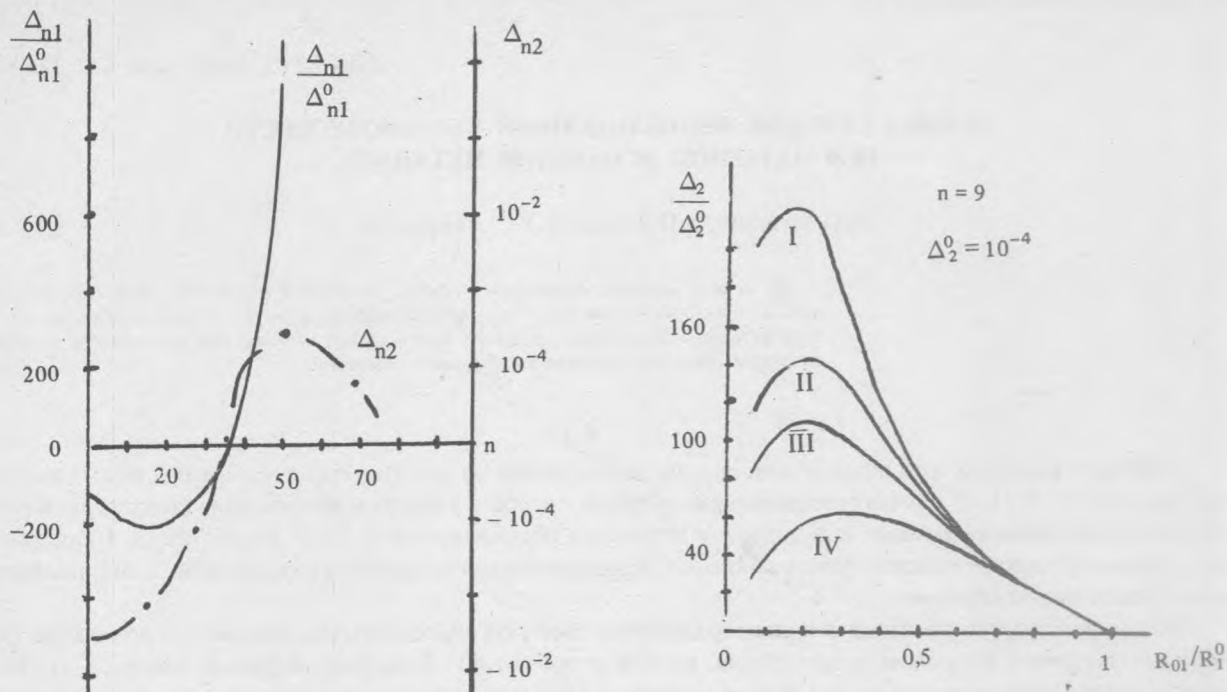


Рис. 1. Дисперсионная кривая значений амплитуд возмущений на момент максимального сжатия $R_{01} = R_{\min} = 0,288$ для начальных значений $A_S^0 = 200$, $\beta = 0,09$.

Рис. 2. Развитие возмущений на внешней границе при различных режимах ускорения внешним давлением: I — $a = 2$, $p_* = 1/3$; II — $a = 0$; $p_* = 1$; III — $a = -2$, $p_* = 5/3$; IV — $a = 0$, $p_* = 7,01$ при $R_{01}(t) \in [0,95, 1]$, и $p_* = 0$ при $R_{01} < 0,95$.

Рост возмущений при ускорении оболочки внешним давлением. Рассмотрим случай полой оболочки ($\beta = 0$). При $t = 0$ $R_1^0 = 1$, $V_1^0 = 0$, $\Delta_{n1}^0 = 0$, $\Delta_{n2}^0 = 10^{-4}$, $\dot{\Delta}_{n1}^0 = \dot{\Delta}_{n2}^0 = 0$. Исследовалась эволюция возмущений границ оболочки при различных режимах ее ускорения внешним давлением P^{ext} . Было взято четыре режима изменения P^{ext} , так чтобы во всех случаях суммарная работа, затраченная на ускорение оболочки,

была одинаковой: $A = 4\pi \int_0^1 P^{\text{ext}} R_{02}^2 V_{02} dt' = \text{const}$, $P^{\text{ext}} = p_*/R_{01}^a$. На рис. 2 показано развитие возмуще-

ний внешней границы (Δ_2) для оболочки с $A_S^0 = 100$ и $n = 9$. В случае (I) давление нарастает в процессе имплозии оболочки, в случае (II) остается постоянным. Случай (IV) соответствует короткому сильному удару. Из рисунка видно, что самая неустойчивая ситуация имеет место в том случае, когда давление нарастает в процессе имплозии (режим с "обострением" давления). Поведение возмущений Δ_2 при других значениях n для случаев (I) — (III) качественно такое же, как показано на рис. 2. В случае (IV) при больших n -возмущения осциллируют при $R_{01} < 0,95$, что соответствует рассмотренному выше случаю свободного полета оболочки.

Рассмотренная задача о развитии возмущений границ оболочки из несжимаемой жидкости имеет самостоятельное значение. Кроме того, полученные решения могут быть использованы для качественного объяснения поведения возмущений при имплозии сферических оболочек в исследованиях по инерциальному термоядерному синтезу, достижению высоких плотностей энергии и сверхсильных магнитных полей, а также при тестировании сложных неоднородных гидродинамических программ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc., London, A201, 192 (1950).
2. Plesset M. S., Mitchell T. P. Quart. Appl. Math. 13, 4 (1956).
3. Гамалий Е. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 23 (1976).
4. Hunt J. N. Appl. Sci. Res., sec. A, 10, 59 (1961).
5. Басов Н. Г. и др. Препринт ФИАН № 315, М., 1985.

Поступила в редакцию 12 января 1987 г.