

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ОБЪЕМНОМ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИИ

Ю.Г. Веревошкин, С.А. Старцев

*Рассматривается двумерная нестационарная модель охлаждаемого с поверхности слоя жидкости, поглощающей излучение произвольного спектрального состава. Получены три термических режима слоя в зависимости от соотношения между потоками падающего излучения и уходящего с верхней границы тепла.*

За основу берется двумерная нестационарная модель бесконечного в горизонтальном направлении (ось  $x$ ) слоя жидкости с плоскими недеформируемыми границами, предложенная в /1/. От верхней границы слоя ( $z = 0$ ) отводится стационарный поток тепла  $Q$  ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ), нижняя граница ( $z = 1$ ) теплоизолирована. На обеих границах задаются "свободные" граничные условия для скорости. Модель /1/ дополняется введением плотности объемного энерговыделения  $q(z)$  ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ), обусловленного поглощением падающего сверху неоднородного по спектральному составу излучения. Решается система уравнений, состоящая из записанного в безразмерном виде уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Theta + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} + \frac{qh}{Q}, \quad (1)$$

уравнения неразрывности

$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = 0 \quad (2)$$

и следующего из уравнения вихревого движения при отбрасывании инерционных членов соотношения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 w = R \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad R = \frac{agQh^4}{k^2 \nu \rho c} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$w = \partial^2 w / \partial z^2 = \Theta = 0 \quad \text{при } z = 0; 1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 1 \quad (z = 0), \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 0 \quad (z = 1). \quad (5)$$

Здесь  $\bar{T}(z, t)$  и  $\Theta(x, z, t)$  — соответственно средняя и флуктуационная по горизонтали составляющие температуры ( $T = \bar{T} + \Theta$ );  $h$  — толщина слоя;  $R$  — потоковое число Релея;  $w$  — вертикальная составляющая скорости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $k$  и  $a$  — коэффициенты температуропроводности и объемного расширения;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\rho$  — плотность;  $c$  — удельная теплоемкость. При отбрасывании члена  $qh/Q$  в (1) все обозначения, уравнения и граничные условия совпадут с /1/.

Плотность объемного энерговыделения  $q$  представляется в виде

$$q = - (1/h) (\partial J / \partial z), \quad J = J_0 \sum_i D_i \exp(-\kappa_i h z),$$

где  $J_0$  — размерный поток излучения на верхней границе жидкости. Метод решения системы (1) — (3) аналогичен /1/.  $\bar{T}(z, t)$  и  $w(x, z, t)$  разлагаются в ряды, удовлетворяющие граничным условиям (4), (5).

$$\bar{T} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{B_n(t)}{n} \cos(n\pi z) - \left( \frac{1}{2} z^2 - z + B_0(t) \right) - t,$$

$$w = \sum_{n=1}^N A_n(t) \sin(n\pi z) \cos(ax). \quad (6)$$

Разложения для  $u$  и  $\Theta$  получаются подстановкой (6) соответственно в (2) и (3). Ряды подставляются в уравнение (1), которое усредняется с комбинациями синусов и косинусов, зависящих от пространственных координат /1/. Численно решая полученную систему из  $2N + 1$  дифференциальных уравнений первого порядка, находим функции  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$ ,  $B_0(t)$ .

Расчеты проводятся для слоя воды ( $h \leq 12$  см), в котором распространяется солнечное излучение, при  $50 \text{ Вт/м}^2 \leq Q \leq 150 \text{ Вт/м}^2$ . Теплофизические параметры воды соответствуют  $20^\circ\text{C}$  /2/. Наборы коэффициентов  $D_1$  (0,7096; 0,1316; 0,09569; 0,06289) и  $\kappa_1$  (0,6077; 2097; 40,72; 40,16 ( $\text{м}^{-1}$ )), используемые при расчетах, аппроксимируют поглощение солнечного излучения водой при  $z' = zh \leq 12$  см (функцию  $J(z')/J_0$ , затабулированную в /3/) с точностью 1,5%. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) жидкость в среднем изотермична ( $\bar{T}(z,0) = 0$ ), а разложение скорости представляет собой белый шум /1/:  $B_n(0) = 1/\pi n$  ( $n \geq 1$ ),  $B_0(0) = 1/3$ ,  $A_n(0) = 0,1$ . Интенсивность конвекции характеризуется среднеквадратичным значением  $(\overline{w^2})^{1/2}$  /1/. При фиксированных значениях  $R$ ,  $J_0/Q$ ,  $h$  подбирается такое волновое число  $a_{\text{опт}}$ , при котором в момент установления конвекции величина  $(\overline{w^2})^{1/2}$  максимальна. Рассматриваются такие решения системы (1) – (3), для которых зависимость размерной температуры и скорости от  $h$  является слабой. Для  $J_0 = 0$  это имеет место при  $R \geq 10^7$  /1/. При  $J_0/Q \leq 5$  требуемое значение  $R$  оценивается из соотношения

$$R \geq 10^7 / (1 - DJ_0/Q), \quad D = 0,1567. \quad (7)$$

При  $J_0/Q \leq 5$  безразмерное волновое число  $a_{\text{опт}}$  представимо в виде  $a_{\text{опт}} = a_0(R/10^7)^{1/4}$ , где  $a_0 \approx 7(1 + 0,02J_0/Q)$ . При различных значениях отношения  $J_0/Q$  получены три термических режима. В двух из них в слое возникает конвекция. Если  $J_0/Q < 3,3$ , то, как и в /1/, конвекция является перемежающейся.

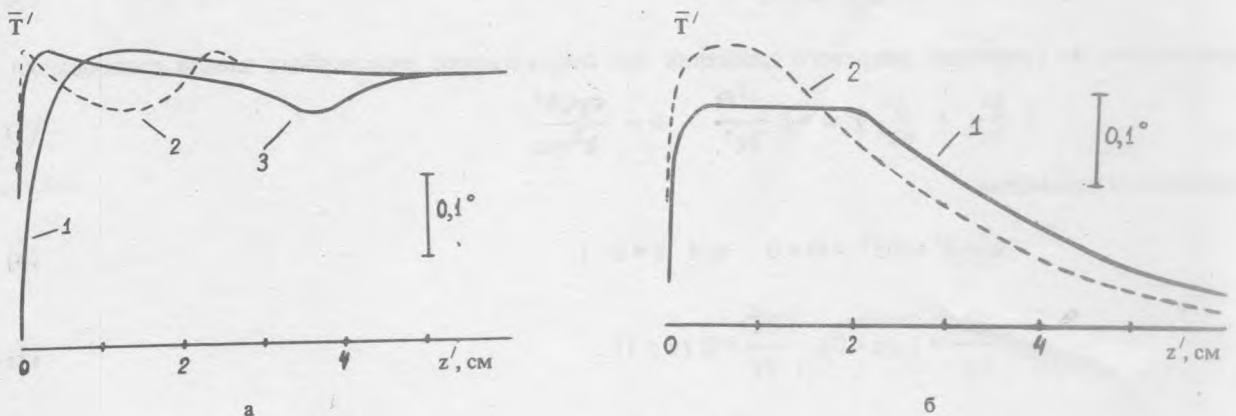


Рис. 1. Профили средней температуры при  $Q = 100 \text{ Вт/м}^2$ : а –  $J_0/Q = 3$ ; б –  $J_0/Q = 6$  (1), 7 (2).

На рис. 1а показана временная эволюция профиля средней температуры в этом режиме: 1 – нарастание температурного пограничного слоя и начало развития конвекции, 2 – частичное разрушение температурного пограничного слоя конвекцией и распределение холодной воды по конвективной ячейке, 3 – опускание холодной воды вглубь жидкости. Средний период эволюции пограничного слоя

$$\tau' = 12,9[\nu\rho c/ ag(Q - DJ_0)]^{1/2}. \quad (8)$$

Нижняя граница слоя генерации перемежающейся конвекции оценивается из (7) при знаке равенства. При  $J_0/Q < 3,3$  поглощение солнечной энергии этим слоем меньше потерь тепла через верхнюю границу. Если  $J_0/Q > 3,3$ , то за счет указанных механизмов к этому слою в сумме подводится энергия. В этом случае по истечении времени установления формируется тип температурного пограничного слоя, показанный на рис. 16 (кривая 1), а конвекция становится стационарной\*. Граница проникновения стационарной конвекции, практически совпадающая с нижней границей квазиоднородного слоя (рис. 16, кривая 1), расположена выше нижней границы слоя генерации перемежающейся конвекции, существующей во время установления режима. Если  $J_0/Q$  стремится к  $D^{-1} \approx 6,4$ , то, согласно (8),  $\kappa' \rightarrow \infty$ . Согласно численным расчетам, при  $J_0/Q > D^{-1}$  конвекция действительно не возникает, возмущения затухают при любом  $a$ , а профиль  $\bar{T}'(z')$  приобретает вид, показанный на рис. 16 (кривая 2).

По данным лабораторного эксперимента /4/ охлаждение свободной поверхности жидкости при отсутствии ветра и солнечного излучения приводит к перемежающейся конвекции, период которой хорошо описывается (8) ( $J_0 = 0$ ). При  $Q = 140 \text{ Вт/м}^2$ ,  $J_0/Q \approx 4$  в океане во время штиля был зарегистрирован профиль  $T'(z')$ , подобный показанному на рис. 16 (кривая 1) /5/. Разность температур  $\delta T'$  на поверхности и в максимуме составила  $0,3 \div 0,4^\circ$ , а толщина квазиоднородного слоя  $\delta z'$  — от 7 до 12 см. По нашим расчетам при таких условиях  $\delta T' = 0,27^\circ$ ,  $\delta z' = 7 \text{ см}$ .

\* Точное определение путем численного моделирования границы перехода от перемежающейся конвекции к стационарной затруднено увеличением времени установления режима по мере приближения  $J_0/Q$  к 3,3. Величина  $J_0/Q = 3,3$  получена с помощью вышеприведенных оценок при  $Q = 100 \text{ Вт/м}^2$ . Если  $Q = 50$  или  $150 \text{ Вт/м}^2$ , то граничное число  $J_0/Q$  равно соответственно 3,2 и 3,4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Foster T. D. Geophys. Fluid Dyn., 2, № 3, 201 (1971).
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.
3. Дера Е., Судьбин А. И., Чишек В. Поглощение солнечной энергии поверхностными слоями воды. В кн. Взаимодействие атмосферы, гидросферы и литосферы в прибрежной зоне моря. София, Изд. БАН, 1983, стр. 101.
4. Гинзбург А. И., Зацепин А. Г., Федоров К. Н. Изв. АН СССР, ФАО, 13, № 12, 1268 (1977).
5. Соловьев А. В. Изв. АН СССР, ФАО, 15, № 7, 750 (1979).

Поступила в редакцию 4 февраля 1987 г.