Краткие сообщения по физике № 5-1987 г.

УДК 533.95

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ТОКОВО–КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А.М. Игнатов, Р.Р. Киквидзе

Получены укороченные уравнения, описывающие нелинейную динамику тонкого слоя плазмы с током вблизи проводящей стенки.

Токово-конвективная неустойчивость (ТКН) скомпенсированных электронных пучков возникает вследствие зависимости плотности электронов от поперечных координат. Физическая причина ТКН обусловлена положительной обратной связью через обеспечивающий компенсацию пучка ионный фон. Линейная стадия ТКН в настоящее время изучена достаточно подробно. Нелинейной теории ТКН не существует. Не проводилось и численного моделирования плазмы в условиях, когда проявляется эта неустойчивость.

В настоящей работе исследуется один частный случай ТКН в следующей постановке. Пусть холодный слой плазмы с током расположен вблизи проводящей стенки. Плазма удерживается магнитным полем B_0: $\Omega_{Be} \gg \omega_{Le}$, но $\Omega_{Bi} \ll \omega_{Li}$, где $\Omega_{Be,i}$ и $\omega_{Le,i}$ соответственно циклотронные и плазменные частоты электронов и ионов. Проводящая стенка предполагается проницаемой для плазмы и невзаимодействующей с ней. Тем самым задача приобретает модельный характер – таких стенок в природе не бывает. Однако нам представляется, что наиболее существенные особенности динамики ТКН сохраняются и в этой постановке.

Движение ионов описывается уравнениями гидродинамики с нулевым давлением:

$$\begin{gathered} \partial n_i/\partial t + \nabla(n_i v_i) = 0, \\ \partial v_i / \partial t + (v_i \nabla) v_i = (e/M)\ \Phi. \end{gathered} \tag{1}$$

Поскольку электроны плазмы сильно замагничены, для описания их динамики воспользуемся дрейфовым приближением:

$$\begin{gathered} \partial n_e/\partial t + \nabla(n_e v_e) = 0, \\ \partial v_{ez}/\partial t + (v_e \nabla) v_{ez} = -(e/m)\,\partial\Phi/\partial z, \\ v_{\perp e} = [B_0 \times \nabla\Phi]c/B_0^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ось z направлена вдоль B_0. Предполагается, что все характерные скорости много меньше скорости света. Поэтому можно пренебречь искажением магнитного поля, а электрическое поле считать потенциальным. Уравнение Пуассона $\Delta\Phi = -4\pi e(n_e - n_i)$ следует дополнить граничными условиями. На проводящей стенке, лежащей в плоскости $y = 0$, $\Phi = 0$. Предполагается, что других проводников нет, поэтому при $y \to \infty$ $\Phi \to 0$. Кроме того, в пределе $x, z \to \infty$ все величины остаются конечными.

Уравнения (1), (2) допускают стационарное решение:

$$n_e = n_i = n_0\Theta(h - y), \quad v_{ze} = u = \mathrm{const}, \quad v_i = v_{\perp e} = 0, \quad \Phi = 0, \tag{3}$$

где h – толщина пучка, $\Theta(y)$ – функция Хевисайда. Это решение неустойчиво. Рассмотрим динамику тонкого плазменного слоя в длинноволновом пределе, в предположении, что выполнены неравенства:

$$k_x h \ll 1, \; k_t \ll k_x, \;\; \omega \ll ku\, m/M, \;\; \omega_{Li}, \;\; h \ll u/\Omega_{Be}. \tag{4}$$

При этом дисперсионное соотношение для ТКН имеет вид:

$$\omega^2 = -(k_z/k_x)\, u\Omega_{Bi}/h. \tag{5}$$

Возбуждаемая волна является поверхностной, причем ее устойчивость зависит от направления распространения.

Для получения нелинейного уравнения, описывающего нелинейную эволюцию ТКН в пределе (4), необходимо сделать некоторые упрощающие предположения. Известно, что при $\omega \ll \omega_{Li}$ в плазме с током возникает апериодическая бунемановская неустойчивость. При этом плазма ведет себя как сжимаемая жидкость с чисто мнимой фазовой скоростью iu m/M /2/. В рассматриваемом случае толщина пучка мала и объемная бунемановская неустойчивость переходит в поверхностную ТКН (5) с фазовой скоростью, много меньшей um/M. Следовательно, неравенства (4) позволяют рассматривать плазму с током как квазинейтральную несжимаемую жидкость. Решение уравнений (1), (2) при этом можно искать в виде

$$n_e = n_i = n_0\theta(hf(x,z,t) - y), \tag{6}$$

где $f(x,z,t)$ – безразмерная толщина пучка. Подставляя выражение (6) в электронные уравнения движения (2), получаем связь между потенциалом на поверхности слоя $\Phi_0 = \Phi|_{y=hf}$ и продольной скоростью $w = v_{ze}|_{y=hf}$:

$$w\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{c}{B_0 h}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad \frac{1}{2}w^2 + \frac{e}{m}\Phi_0 = \frac{1}{2}u^2, \tag{7}$$

где предполагается, что при $z \to -\infty$ $\Phi_0 \to 0$ и $v_{ze} \to u$.

В ионных уравнениях движения (1) можно положить $v_i = \nabla\psi$. Тем самым задача сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ в области $0 < y < hf(x,z,t)$ совместно с граничными условиями

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \frac{e}{m}\Phi\right]_{y = 0,\, hf(x,z,t)} = 0. \tag{8}$$

Для получения нормальной к поверхности производной ψ эта задача решается в пределе $h\nabla_{x,z} \ll 1$. Таким образом, уравнение, описывающее эволюцию границы плазмы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_i}\right)_{y=hf} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{y=hf}, \tag{9}$$

где $i = x, z$, совместно с (7) образуют замкнутую систему уравнений. Все вычисления здесь аналогичны проводимым при анализе гравитационных волн на мелкой воде. Отличие заключается в граничных условиях: во-первых, связь между потенциалом на поверхности Φ_0 и глубиной f более сложная, чем в случае гравитационных волн и, во-вторых, обычное гидродинамическое условие на дне жидкости (при $y = 0$) $\partial\psi/\partial y = 0$ в данном случае заменяется на $\Phi = 0$ /3/.

Разложение уравнения (9) по степеням производных приводит к системе безразмерных уравнений

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2} = \varphi, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1 - 2\lambda\varphi}, \tag{10}$$

где $\tau = t\sqrt{u\Omega_{Bi}/h}$; $\lambda = \Omega_{Be}h/u \ll 1$; $\varphi = c\Phi_0/huB_0$. Решить эту систему в общем виде не удается. Поэтому ограничимся одним частным решением.

Рассмотрим эволюцию плоской волны, т.е. пусть $f = f(\xi,\tau)$, где $\xi = z\sin\theta + x\cos\theta$. В этом случае уравнения (10) решаются: форма волны остается неизменной, а амплитуда зависит от времени. Если $\mathrm{tg}\theta > 0$, то при $\tau \to \infty$ в зависимости от начальных условий $f \to 0$ или $f \to (1/2)\,\mathrm{tg}\theta\,\tau^2$. Когда амплитуда достигает значения $f = 1 + 1/\lambda\,\mathrm{tg}\theta$, поверхностные электроны останавливаются – при этом $w = 0$. Если же $\mathrm{tg}\theta < 0$, то решение описывает устойчивую нелинейную волну.

Таким образом, на нелинейной стадии ТКН происходят два связанных процесса: поперечный дрейф границы пучка и торможение электронов. Оба этих процесса могут приводить к срыву тока либо из-за остановки пучка, либо из-за его выброса на стенку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А. А. и др. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., Атомиздат, 1980.
2. Галеев А. А. и др. ЖЭТФ, 81, 572 (1981).
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

Поступила в редакцию 11 февраля 1987 г.