УДК 530.1

О СИММЕТРИИ ОДНОМЕРНОЙ КУЛОНОВОЙ ЗАДАЧИ

К. Н. Богатырев, В. П. Макаров

Доказано, что в одномерной задаче с потенциалом $U(x) = -1/|x|$, наряду с инверсией $\hat{P}$ – интегралом движения в любом симметричном поле $U(|x|)$, существует еще интеграл движения $A = x/|x|$, который определяет инфинитезимальные операторы группы "скрытой" симметрии задачи: оператор $A/\sqrt{-2E}$ группы вращений $O(2)$ для состояний дискретного спектра ($E < 0$) и оператор $A/\sqrt{2E}$ группы, изоморфной группе Лоренца, для состояний сплошного спектра ($E > 0$).

Решение одномерной кулоновой задачи в x-представлении (см. [1], § 112) замечательно тем, что все уровни энергии двукратно вырождены: четное $\Psi_{Eg}(x)$ и нечетное $\Psi_{Eu}(x)$ состояния имеют одинаковую энергию E. Может показаться, что этот результат противоречит теореме о том, что "в одномерной задаче все энергетические уровни дискретного спектра не вырождены" [1] (§ 20). Однако, как заметил Лаудон [2], в доказательстве этой теоремы [1] (§ 20) предполагается, что в точках, где $\Psi_E(x)$ обращается в нуль, потенциал $U(x)$ не имеет особенности. Одномерная кулонова задача относится к этому исключительному случаю: в $x = 0$, где $U(x) = -1/|x|$ имеет особенность, все $\Psi_E(0) = 0$ ([1], §112).

Как известно, (см., например, [1], §§ 4, 10, 11), уровни энергии могут быть вырождены, если только существуют, по крайней мере, два интеграла движения, операторы которых между собой не коммутируют. Следовательно, кроме очевидного интеграла движения – инверсии P ($\hat{P}\Psi(x) \equiv \Psi(-x)$), который имеет место при любом симметричном потенциале $U(|x|)$, одномерная кулонова задача имеет еще некоторый интеграл движения A, причем коммутатор $[\hat{P}, \hat{A}] \neq 0$.

Аналогичная проблема "скрытой" симметрии в трехмерной кулоновой задаче была исследована Фоком [3]. В [3] показано, что: 1) "скрытая" симметрия проявляется явно в p-представлении; 2) группа симметрии задачи для состояний дискретного спектра ($E < 0$) – группа четырехмерных вращений $O(4)$, а для состояний сплошного спектра ($E > 0$) – группа, изоморфная группе Лоренца; 3) инфинитезимальными операторами этих групп являются $\hat{\vec{\ell}}$ и $\hat{\vec{A}}/\sqrt{-2E}$ для $E < 0$ и $\hat{\vec{\ell}}$ и $\hat{\vec{A}}/\sqrt{2E}$ для $E > 0$, где $\hat{\vec{\ell}}$ – оператор момента импульса частицы, а $\hat{\vec{A}}$ – оператор интеграла движения, специфического только для кулоновой задачи (см., например, [1], § 36):

$$\hat{\vec{A}} = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{2}(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{\ell}} - \hat{\vec{\ell}} \times \hat{\vec{p}}),$$

$$\hat{\vec{\ell}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}}.(1)$$

Подход Фока [3] был применен для исследования кулоновой задачи в пространстве произвольного числа измерений (см. [4] и цитированные там работы). Оказалось, что группа симметрии двумерной (в плоскости x, y) кулоновой задачи для $E < 0$ – группа $O(3)$, а для $E > 0$ – группа, изоморфная группе Лоренца, причем инфинитезимальные операторы в случае $E < 0 - \hat{\ell}, \hat{A}_x/\sqrt{-2E}$ и $\hat{A}_y/\sqrt{-2E}$, а в случае $E > 0 - \hat{\ell}, \hat{A}_x/\sqrt{2E}$ и $\hat{A}_y/\sqrt{2E}$, где (ср. с (1))

$$\hat{A}_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}(\hat{p}_y\hat{\ell} + \hat{\ell}\hat{p}_y),\ \hat{A}_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}(\hat{p}_x\hat{\ell} + \hat{\ell}\hat{p}_x),$$

$$\hat{\ell} = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x. \tag{2}$$

Группа симметрии одномерной кулоновой задачи – группа $O(2)$ для $E < 0$ и группа, изоморфная однопараметрической группе Лоренца, для $E > 0$ [4]. Инфинитезимальные операторы этих групп в [4] не получены. Именно поэтому в данной работе мы возвращаемся к вопросу о симметрии одномерной кулоновой задачи.

Продолжая приведенную выше аналогию (см. переход от (1) к (2)), можно предположить, что в одномерной кулоновой задаче инфинитезимальный оператор группы симметрии для состояний с $E < 0 - A/\sqrt{-2E}$, а для состояний с $E > 0 - A/\sqrt{2E}$, где (см. (2)) $A = x/|x|$. Оператор A не коммутирует с $\hat{P} : [\hat{P}, A] = -2A\hat{P}$. Коммутатор

$$[\hat{H}, A] = \left[\frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{1}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right] = -i\{\delta(x)\hat{p} + \hat{p}\delta(x)\} \tag{3}$$

отличен от нуля, но все его матричные элементы $< \Psi_E|[\hat{H}, A]|\Psi_{E'} > = 0$, так как все $\Psi_E(0) = 0$. Поэтому $\hat{H}$ и A имеют общую систему собственных функций. Так как $A^2 = 1$, собственные значения оператора A равны ± 1:

$$A\Psi_{E\pm}(x) \equiv \frac{x}{|x|}\Psi_{E\pm}(x) = \pm\Psi_{E\pm}(x); \tag{4}$$

отсюда следует, что $\Psi_{E+}(x)|_{x<0} = 0$, и $\Psi_{E-}(x)|_{x>0} = 0$. Заметим, что $\hat{P}\Psi_{E\pm}(x) = \Psi_{E\mp}(x)$. Подставляя в (4) вместо $1/|x|$ оператор $\hat{p}^2/2 - \hat{H}$, получаем уравнение, эквивалентное (4):

$$A\Psi_{E\pm}(x) = x\left(\frac{1}{2}\hat{p}^2 - \hat{H}\right)\Psi_{E\pm}(x) = \pm\Psi_{E\pm}(x). \tag{5}$$

Введем функции $a_{E\pm}(p)$ в p-представлении:

$$\Psi_{E\pm}(x) = \int e^{ipx} a_{E\pm}(p)dp; \tag{6}$$

для них из (5) получаем уравнение

$$\hat{A}(p)a_{E\pm}(p) = \frac{i}{2}\frac{d}{dp}(p^2 - 2E)a_{E\pm}(p) = \pm a_{E\pm}(p). \tag{7}$$

Дальнейшие вычисления основываются на этом уравнении; в этом наш подход отличается от [4], где используется, как и в [3], интегральное уравнение (заметим, что в отличие от трехмерного случая, интеграл Фурье $\sim \int e^{iqx}dx/|x|$ для одномерного поля $U(x) = -1/|x|$ расходится при всех q).

Рассмотрим сначала состояния дискретного спектра $E < 0$. Введем $k \geq 0$, так что $E = -k^2/2$, координаты ξ и η точки на окружности единичного радиуса [3]

$$\xi = \frac{k^2 - p^2}{k^2 + p^2} = \cos\varphi,\ \eta = \frac{2kp}{k^2 + p^2} = \sin\varphi,\ p = k\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \tag{8}$$

и функцию

$$\Psi_{k\pm}(\varphi) = (p^2 + k^2)a_{k\pm}(p)|_{p=k\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}. \tag{9}$$

Из (7) – (9) получаем уравнение

$$\hat{A}(\varphi)\Psi_{k\pm}(\varphi) = ik\frac{d}{d\varphi}\Psi_{k\pm}(\varphi) = \pm\Psi_{k\pm}(\varphi), \tag{10}$$

отсюда следует, что инфинитезимальный оператор группы $O(2)$ в плоскости (ξ, η) $\hat{p}_\varphi = -i\partial/\partial\varphi = -\hat{A}(\varphi)/\sqrt{-2E}$. Решая уравнение (10) и учитывая, что (см. (6)) $\Psi_{E\pm}(0) = \int a_{E\pm}(p)dp = 0$, получаем

$$\Psi_{n\pm}(\varphi) = C_n e^{\mp in\varphi}, \; E_n = -\frac{1}{2n^2}, \; n = 1, 2, 3, ...k = 1/n; \tag{11}$$

$$a_{n\pm}(p) = C_n \frac{n^2}{1+(np)^2} \exp[\mp 2in\mathrm{arctg}(np)] =$$
$$= C_n n^2 (1 \mp inp)^{n-1} (1 \pm inp)^{-(n+1)}, \tag{12}$$

где постоянные C_n определяются условием нормировки.

Получим функции $\Psi_{n\pm}(x)$ в x-представлении. Так как, согласно (12), $a_{n-}(p) = a_{n+}(-p)$, из (6) следует, что $\Psi_{n-}(x) = \Psi_{n+}(-x)$. Поэтому достаточно найти $\Psi_{n+}(x)$. Подставляем $a_{n+}(p)$ из (12) в (6), вводим новую переменную интегрирования $t = x(1/n + ip)$ и замыкаем контур интегрирования в t-плоскости полуокружностью большого радиуса, уходящей в область $Ret < 0$, с центром в точке x/n на вещественной оси. В случае $x < 0$ внутри контура подынтегральная функция не имеет особых точек и получаем $\Psi_{n+}(x) = 0$, как и должно быть. В случае $x > 0$, используя известное интегральное представление вырожденной гипергеометрической функции (см., например, [1]), получаем

$$\Psi_{n+}(x) = 2\pi C_n (-1)^{n-1} e^{-x/n} x F(-(n-1), 2, 2x/n); \tag{13}$$

этот результат совпадает с известным решением [1] (§ 112), причем $C_n = (-1)^{n-1}(\pi n^{3/2})^{-1}$. Решение, представленное верхней строчкой в (12) с этим C_n, только постоянным фазовым множителем отличается от соответствующего решения в [4].

Рассмотрим теперь состояния сплошного спектра $E = k^2/2$. Следуя [3], [4], введем кординаты ξ и η на гиперболе $\xi^2 - \eta^2 = 1$:

$$\xi = \frac{k^2+p^2}{k^2-p^2} = \mathrm{ch}\varphi \times \begin{cases} 1, & |\, p \,| < k \\ -1, & |\, p \,| > k \end{cases}, \; \eta = \frac{2kp}{k^2-p^2} = \mathrm{sh}\varphi. \tag{14}$$

На правой ветви гиперболы ($\xi \geq 1$, $|p| < k, p = k\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}$) вводим функцию (ср. с (9))

$$\Phi^{прав}_{k\pm}(\varphi) = (p^2 - k^2) a_{k\pm}(p)|_{p=k\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}}. \tag{15}$$

Для этой функции из (7), (14) и (15) получаем уравнение

$$\hat{A}_{прав}(\varphi)\Phi^{прав}_{k\pm}(\varphi) = -ik\frac{d}{d\varphi}\Phi^{прав}_{k\pm}(\varphi) = \pm\Phi^{прав}_{k\pm}(\varphi), \tag{16}$$

отсюда следует, что инфинитезимальный оператор группы преобразований, соответствующих перемещению точки по правой ветви гиперболы, $\hat{p}_\varphi = -i\partial/\partial\varphi = \hat{A}_{прав}(\varphi)/\sqrt{2E}$. Решение уравнения (16) имеет вид

$$\Phi_{k\pm}^{прав}(\varphi) = C_k^{прав} e^{\pm i\varphi/k}, \tag{17}$$

$$a_{k\pm}(p) = C_k^{прав} \frac{1}{p^2 - k^2} \exp\left[\pm\frac{2i}{k}\mathrm{Arth}(p/k)\right] = -C_k^{прав} \frac{1}{k^2} \frac{(1 \pm p/k)^{i/k-1}}{(1 \mp p/k)^{i/k+1}}, \ (|p| < k). \tag{18}$$

На левой ветви гиперболы ($\xi \leq -1$, $|p| > k$, $p = -k\mathrm{cth}\frac{\varphi}{2}$) вводим функцию, аналогичную (15):

$$\Phi_{k\pm}^{лев}(\varphi) = (p^2 - k^2)a_{k\pm}(p)|_{p=-k\mathrm{cth}\frac{\varphi}{2}}. \tag{19}$$

Вместо уравнения (16) теперь имеем уравнение

$$\hat{A}_{лев}(\varphi)\Phi_{k\pm}^{лев}(\varphi) = -ik\frac{d}{d\varphi}\Phi_{k\pm}^{лев}(\varphi) = \pm\Phi_{k\pm}^{лев}(\varphi); \tag{20}$$

инфинитезимальный оператор группы преобразований, соответствующих перемещению точки по левой ветви гиперболы, $\hat{p}_\varphi = -i\partial/\partial\varphi = -\hat{A}_{лев}(\varphi)/\sqrt{2E}$. Решение уравнения (20) имеет вид

$$\Phi_{k\pm}^{лев}(\varphi) = C_k^{лев} e^{\mp i\varphi/k}, \tag{21}$$

$$a_{k\pm}(p) = C_k^{лев} \frac{1}{p^2 - k^2} \exp\left[\pm\frac{2i}{k}\mathrm{Arcth}(p/k)\right] =$$

$$= -C_k^{лев} e^{-\pi/k} \frac{1}{k^2} \frac{(1 \pm p/k)^{i/k-1}}{(1 \mp p/k)^{i/k+1}}, \ (|p| > k). \tag{22}$$

Функции $a_{k\pm}(p)$ должны еще удовлетворять условию $\Psi_{k\pm}(0) = \int a_{k\pm}(p)dp = 0$. Но функции $a_{k\pm}(p)$ в точках $p = \pm k$ формулами (18) и (22) не определены и поэтому нужно еще указать, как понимать интегралы по p. Положив $C_k^{лев} = e^{\pi/k} C_k^{прав}$, так что при всех $p \neq \pm k$

$$a_{k\pm}(p) = -C_k^{прав} \frac{1}{k^2} \frac{(1 \pm p/k)^{i/k-1}}{(1 \mp p/k)^{i/k+1}}, \tag{23}$$

можно было бы надеяться, что эти интегралы существуют в смысле главного значения. Но нетрудно увидеть, что в этом смысле интегралы не существуют.

Функции $a_{n+}(p)(a_{n-}(p))$ (12) имеют особенности – полюса в верхней (нижней) полуплоскости комплексного переменного p: в точках $p = i/n$ ($p = -i/n$) при $n \to \infty$

приближающихся к вещественной оси. Естественно доопределить функции (23) соответствующим образом:

$$a_{k\pm}(p) = -C_k \frac{1}{k^2} \frac{\left(1 \pm \frac{p \mp i\delta}{k}\right)^{i/k-1}}{\left(1 \mp \frac{p \mp i\delta}{k}\right)^{i/k+1}}, \ \delta \to +0. \tag{24}$$

С этими функциями действительно $\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{k\pm}(p)dp = 0$.

Получим волновые функции в x-представлении. Так как, согласно (24), $a_{k-}(p) = a_{k+}(-p)$, то (см. (6)) $\Psi_{k-}(-x) = \Psi_{k+}(x)$. Поэтому достаточно найти $\Psi_{k+}(x)$. Подставляем $a_{k+}(p)$ из (24) в (6), вводим новую переменную интегрирования $t = x[\delta + i(p+k)]$ и замыкаем контур интегрирования в t-плоскости полуокружностью большого радиуса, уходящего в область $Ret < 0$, с центром в точке δx на вещественной оси. Так же, как в случае дискретного спектра, получаем, что при $x < 0$ $\Psi_{k+}(x) = 0$ и при $x > 0$

$$\Psi_{k+}(x) = -2\pi C_k e^{\pi/k} e^{-ikx} x F\left(1 + \frac{i}{k}, 2, 2ikx\right); \tag{25}$$

этот результат совпадает с известным решением ([1] § 112), причем $C_k = -\sqrt{2k/\pi}(e^{2\pi/k} - 1)^{-1/2}$. Решение, представленное верхней строчкой в (18), отличается нормировочным множителем от соответствующего решения в [4], а решение, представленное верхней строчкой в (22), отличается от соответствующего решения в [4] еще и функцией в экспоненте. Эти отличия связаны, по-видимому, с тем, что в [4] функции $a_{k\pm}(p)$ в точках $p = \pm k$ не определены.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1989.
[2] Loudon R. Am. J. Phys., **27**, 649 (1959).
[3] Fock V. A. Z. Phys., **98**, 145 (1935).
[4] Davtyan L. S., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., and Ter-Antonyan V. M. J. Phys. A, **20**, 2765 (1987).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 28 июня 1999 г.