Краткие сообщения по физике № 11-1987 г.

УДК 621.371

СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СИЛЬНОЙ И СЛАБОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

С.Н. Столяров

Показано, что при малой отстройке частоты электромагнитной волны от N-го брэгговского резонанса аналитические решения двухволнового приближения (сильная связь) автоматически переходят в решения теории возмущений (приближение слабой связи).

Распространение и преобразование волн в периодических структурах изучается применительно к электромагнитным, акустическим, электронным и другим типам волн /1–4/. При небольшой глубине модуляции параметров структуры наиболее распространенными методами решения являются теория возмущений по малой глубине модуляции (приближение слабой связи) и двухволновое приближение вблизи брэгговских резонансов (приближение сильной связи). В данной работе на примере электромагнитных волн показано, что при малой глубине модуляции параметров среды решения в приближении сильной связи являются более общими, ибо при удалении от брэгговского резонанса и малой отстройке от резонанса они автоматически переходят в решения по теории возмущений, полученные в приближении слабой связи.

Рассмотрим одномерно периодическую среду с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$, имеющей период d: $\epsilon(z + d) = \epsilon(z)$. Для электромагнитных волн с электрическим вектором $E(x, y, z) = e_y E(z) \times \times \exp i(k_x x - \omega t)$, направленным вдоль оси y, имеем уравнение /2, 3/

$$d^2E(z)/dz^2 + [k_0^2\epsilon(z) - k_x^2]\, E(z) = 0, \tag{1}$$

где $k_0 = \omega/c$; $\epsilon(z) = \bar{\epsilon}\,[1 + \delta\varphi(z)]$; $\bar{\epsilon} = (1/d)\int\limits_0^d \epsilon(z)\,dz$. Из-за периодичности $\epsilon(z)$ функцию $E(z)$ согласно теореме Флоке /5–7/ можно представить в виде:

$$E(z) = \exp(i\kappa z) \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} a_l \exp(il\sigma z)\,; \quad \sigma = 2\pi/d;$$

$$\epsilon(z) = \bar{\epsilon}[1 + \delta\varphi(z)]; \quad \varphi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varphi_m \exp(im\sigma z)\,; \qquad \varphi_m^* = \varphi_{-m}, \tag{2}$$

где $\varphi_m = (1/d)\int\limits_0^d dz\,\varphi(z)\exp(-im\sigma z)\,$; $\varphi_0 = 0$; $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Подставляя эти разложения в уравнение (1), заменяя в двойных суммах индекс l на $(l - m)$ и интегрируя после умножения на $\exp(-il\sigma z)$ по периоду d, получим

$$[\bar{k}^2 f_x^2 - (\kappa + l\sigma)^2]a_l + \bar{k}^2\delta \sum_{m=-\infty,\, m\neq 0}^{m=+\infty} \varphi_m a_{l-m} = 0, \tag{3}$$

где $\bar{k} = k_0\sqrt{\bar{\epsilon}}\,$; $f_x^2 = [1 - (k_x^2/\bar{k}^2)]$; случай $f_x^2 = 1$ соответствует распространению вдоль оси z. Обращение в нуль детерминанта бесконечной однородной системы (3) линейных уравнений для a_l дает уравнение для определения искомой постоянной распространения $\kappa = \kappa(k_0, \delta, \sigma, \varphi_m)$. Амплитуды a_l пространственных гармоник можно выразить через начальную амплитуду одной из гармоник, например, через a_0. При малой глубине модуляции $\delta(\delta \ll 1)$ решение системы (3) можно искать в виде ряда теории возмущений по величине δ (приближение слабой связи). Ограничиваясь только первыми отличными от нуля малыми поправками, получим

$$\kappa \cong \bar{k} f_x \left[1 + \frac{d^2}{\bar{\lambda}^2 f_x^2} \delta^2 \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{|\varphi_l|^2}{(l^2 - 4d^2 f_x^2)/\bar{\lambda}^2} + \ldots\right]; \quad \bar{\lambda} = 2\pi/\bar{k};$$

$$q_l = a_l/a_0 \cong d^2 \delta\varphi_l/\bar{\lambda}^2 l(l + 2df_x/\bar{\lambda}) + \ldots; \tag{4}$$

а $l = \pm 1, \pm 2, \ldots, \ (l \neq 0)$. Отсюда видно, что ряд теории возмущений хорошо сходится при малой глубине модуляции $\delta \ll 1$ и при малом периоде модуляции $d \lesssim \bar{\lambda}/2f_x$. При $d \geqslant \bar{\lambda}/2f_x$ этот ряд плохо сходится вблизи N-го брэгговского резонанса, когда $\Delta_N \ll 1$, где

$$2\bar{k} f_x/\sigma = N(1 + \Delta_N); \quad \Delta_N = (\bar{k} f_x - k_B^N)/k_B^N; \quad k_B^N = \sigma N/2, \tag{5}$$

а $N = 1, 2, \ldots$. Величина Δ_N есть отстройка частоты ω распространяющейся волны от ее резонансного значения $\omega_B^N = ck_B^N/f_x\sqrt{\epsilon}$. Максимальное значение Δ_N, равное $|\Delta_N^{max}| = 1/2N$, осуществляется тогда, когда волновой вектор $\bar{k} f_x$ попадает точно посередине между соседними резонансами k_B^N и k_B^{N+1}. Если теперь в случае $d \geqslant \bar{\lambda}/2f_x$ с помощью (5) выделить в выражениях (4) резонансное слагаемое с $l = -N$, то получим

$$\kappa \cong \bar{k} f_x \left[1 - \frac{s_N^2}{2\Delta_N} + \frac{N^2 s_N^2}{|\varphi_N|^2} \sum_{l=1,\, l \neq N}^{l=\infty} \frac{|\varphi_l|^2}{(N^2 - l^2)}\right]; \quad s_N = \frac{1 + \Delta_N}{2f_x^2} |\varphi_N| \delta;$$

$$q_{-N} \cong -\frac{1 + \Delta_N}{2|\varphi_N|} \varphi_{-N} \frac{S_N}{\Delta_N}; \quad q_{l \neq -N} \cong \frac{1 + \Delta_N}{2|\varphi_N|} \frac{N^2 \varphi_l s_N}{l(l + N + N\Delta_N)} \tag{6}$$

где s_N – коэффициент связи встречных волн. Эти формулы показывают следующее. При малой глубине модуляции $\delta \ll 1$ и, следовательно, малом коэффициенте связи $s_N \ll 1$ относительные амплитуды q_l всех трансформированных волн малы независимо от δ даже вблизи N-го резонанса, когда $|\Delta_N| \ll 1$, если только выполняется условие $s_N \lesssim |\Delta_N| \ll 1$. В этом случае, как видно из формул (6), трансформация волны a_0 происходит преимущественно только в одну бреэгговскую гармонику a_{-N}, а остальные малы по сравнению с a_{-N} в меру малости величины $|\Delta_N|$. В этом случае решение $E(z)$ в (2) представляет из себя модулированное колебание с амплитудами a_0 и a_{-N}, распространяющееся с фазовой скоростью ω/κ в положительном направлении оси z. Формулы (6) показывают также, что при $|\Delta_N| \lesssim s_N \ll 1$ (внутри полосы N-го брэгговского резонанса), амплитуда a_{-N} может стать больше a_0 и приближение слабой связи становится неприменимо. В этом случае решение для $E(z)$ в (2) нужно искать в виде двух сильно связанных между собой гармоник a_0 и a_{-N} (приближение сильной связи). Оставляя в (3) только слагаемые с a_0 и a_{-N}, получим приближенно

$$(\bar{k}^2 f_x^2 - \kappa^2) a_0 + \bar{k}^2 \delta\varphi_N a_{-N} \cong 0;$$

$$[\bar{k}^2 f_x^2 - (\kappa - N\sigma)^2] a_{-N} + \bar{k}^2 \delta\varphi_{-N} a_0 \cong 0. \tag{7}$$

Остальные амплитуды a_l с $l \neq (0, -N)$ можно выразить через a_0 и a_{-N} из системы (3) методом возмущений. В результате получим

$$\kappa \cong \bar{k} f_x (1 - \Delta_N + \eta_N); \quad q_{-N} = \frac{a_{-N}}{a_0} \cong -(1 + \Delta_N)\varphi_{-N} s_N / (\Delta_N + \eta_N) |\varphi_N|;$$

$$\eta_N = \begin{cases} \sqrt{\Delta_N^2 - s_N^2} & \text{при } \Delta_N \geqslant s_N \geqslant 0; \\ i\sqrt{s_N^2 - \Delta_N^2} & \text{при } |\Delta_N| \leqslant s_N; \\ -\sqrt{\Delta_N^2 - s_N^2} & \text{при } \Delta_N \leqslant -s_N \leqslant 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$s_N = \frac{1 + \Delta_N}{2f_x^2} |\varphi_N| \delta; \quad q_{l \neq (0, -N)} \cong (1 + \Delta_N) N^2 s_N (\varphi_l + q_{-N} \varphi_{l+N}) / 2 |\varphi_N| l (l + N + N\Delta_N).$$

При выводе отброшены члены, пропорциональные Δ_N^3, $\Delta_N^2 s_N$, $\Delta_N s_N^2$, и более высокого порядка малости. Из формул (8) видно следующее. Внутри полосы N-го брэгговского резонанса, когда $|\Delta_N| \leqslant s_N$, решение $E(z,t) \cong a_0 \exp(-\bar{k} f_x \sqrt{s_N^2 - \Delta_N^2})[\exp(ik_B^N z) + q_{-N} \exp(-ik_B^N z)] \exp(-i\omega t)$ представляет из себя амплитудно модулированное колебание с периодом $2\pi / k_B^N = 2d/N$, затухающее в положительном направлении оси z. Вне этой полосы, когда $|\Delta_N| > s_N$, это колебание становится модулированным по амплитуде и фазе с тем же периодом 2d/N и кроме того оно распространяется вдоль оси z с фазовой скоростью, равной $c / (f_x \sqrt{\bar{\epsilon}} \sqrt{\Delta_N^2 - s_N^2})$. Вдали от N-го брэгговского резонанса, т.е. при $s_N \ll |\Delta_N| \ll 1$, формулы (8) для κ и q_{-N} в приближении сильной связи автоматически переходят в формулы (6) для κ и q_{-N} в приближении слабой связи, причем все остальные q_l и поправки к κ малы в меру малости отстройки $|\Delta_N|$. Поэтому для количественных оценок преобразования волн в слабомодулированных ($\delta \ll 1$) периодических структурах в качестве приближенного аналитического решения в широком диапазоне отстроек Δ_N как вблизи ($|\Delta_N| \leqslant s_N \ll 1$), так и вдали ($s_N \leqslant |\Delta_N| \ll 1$) от брэгговского резонанса можно использовать формулы (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973.
4. Элаши Ш. ТИИЭР, 64, № 12, 22 (1976).
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., Мир, 1984, с. 255.
6. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М., Наука, 1984, с. 175.
7. Сивухин Д. И. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика, ч. 1, М., Наука, 1986, с. 374.

Поступила в редакцию 3 июля 1987 г.