Краткие сообщения по физике № 11-1987 г.

УДК 533.951

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ТРУБЧАТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДЕ

В.Ю. Шафер

Показано, что потенциальные волны пространственного заряда (ВПЗ) нерелятивистского трубчатого замагниченного электронного пучка, распространяющегося в цилиндрическом волноводе, удовлетворяют критерию Лайтхилла модуляционной неустойчивости. Приводится зависимость инкремента неустойчивости от волнового вектора ВПЗ.

Исследуем устойчивость стационарных периодических ВПЗ трубчатого электронного пучка, распространяющегося в вакуумном цилиндрическом волноводе. Пучок предполагается бесконечно тонким, нерелятивистским, холодным; волновод – идеально проводящим; внешнее магнитное поле, приложенное вдоль общей оси симметрии волновода и пучка (ось 0z), – бесконечно сильным; собственным магнитным полем пучка пренебрегаем; рассматриваем только азимутально симметричные состояния.

Такой пучок описывается следующей системой гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(NV) = 0, \quad N = N_0 + \delta N(z,t), \quad V = V_0 + \delta V(z,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{e}{m}\frac{\partial \Phi(R,z,t)}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2eN\frac{\delta(r-R)}{R}, \tag{3}$$

$$\Phi(R_0,z,t) = 0, \quad |\Phi(r,z,t)| < \infty, \quad -\infty < z < +\infty, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_0.$$

Здесь R_0 – радиус волновода; R – радиус пучка; $e > 0$, m – заряд и масса электрона; $N(z,t)$ – погонная плотность числа электронов, $V(z,t)$ – гидродинамическая скорость, $\Phi(R,z,t)$ – потенциал пучка.

В линейном приближении периодические стационарные решения системы (1) – (3) вида $\delta N, \delta V \sim \exp(i\Theta)$, $\Theta = kz - \omega t$ устойчивы и задаются линейным дисперсионным соотношением

$$\omega_{\pm}(k) = kV_0 \pm k\sqrt{\frac{2e^2N_0}{m}\Sigma(k)}, \quad \Sigma(k) \equiv I_0^2(kR)\left[\frac{K_0(kR)}{I_0(kR)} - \frac{K_0(kR_0)}{I_0(kR_0)}\right]. \tag{4}$$

Здесь $\omega_{\pm}$ – частоты быстрой (+) и медленной (–) ВПЗ пучка; I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя; стационарными называем состояния, в которых зависимость возмущенных величин от z, t сводится к зависимости от Θ.

В работе /1/ в длинноволновом приближении: $k^2/k_\perp^2 \ll 1$, $k_\perp^2 = 4\ln(R_0/R)/(R_0^2 - R^2[1 + 2\ln(R_0/R)])$ получены нелинейные стационарные решения системы (1) – (3) – уединенные и периодические, удовлетворяющие условиям равенства тока $I = N(\Theta)V(\Theta)$ и энергии электронов $mV^2(\Theta)/2 - e\Phi(R,\Theta)$ возмущенного пучка току $I_0 = N_0 V_0$ и энергии электронов $mV_0^2/2 - e\Phi_0$ в невозмущенном однородном состоянии N_0, V_0 (в системе покоя волны). Эти волны устойчивы. В данной работе показывается, что периодические решения (1) – (3) малой, но конечной амплитуды, удовлетворяющие (более близким к экспериментальным) условиям сохранения тока и заряда пучка, в среднем за период по Θ в произвольной системе отсчета

$$\langle N \rangle_\Theta = N_0, \quad \langle NV \rangle_\Theta = N_0 V_0 \tag{5}$$

неустойчивы при всех $0 < k < \infty$ (модуляционная или сателлитная неустойчивость).

Решение уравнения Пуассона (3) имеет вид:

$$\Phi(R,z,t) = -e \sum_{s=1}^{\infty} (c_s/\lambda_s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_s|z-\xi|} N(\xi,t)\, d\xi, \tag{6}$$

где $c_s \equiv 2J_0^2(\lambda_s R)/R_0^2 J_1^2(\lambda_c R_0)$, $J_{0,1}$ – функции Бесселя; $\lambda_s > 0$ – корни уравнения $J_0(\lambda_s R_0) = 0$. Подставляя (6) в правую часть уравнения (2), переходя к безразмерным переменным $x \equiv \delta N/N_0$, $y \equiv \delta V/V_0$ и считая, что x, y зависят только от $\Theta = kz - \omega t$, перепишем систему (1), (2) и дополнительные условия (5) в виде:

$$\begin{aligned} &\Omega x' - y' = (xy)', \\ &A\{x\} + \Omega y' = yy'; \end{aligned} \qquad \langle x \rangle_\Theta = 0, \quad \langle y \rangle_\Theta + \langle xy \rangle_\Theta = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Omega \equiv \omega/kV_0 - 1$,

$$A\{x\} \equiv \frac{e^2 N_0}{mV_0^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_s}{k^2} \left[\int_{-\infty}^{\Theta} e^{-\frac{\lambda_s}{k}(\Theta-\xi)} x(\xi)d\xi - \int_{\Theta}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda_s}{k}(\xi-\Theta)} x(\xi)d\xi \right],$$

штрих означает дифференцирование по Θ.

Систему (7) решаем методом последовательных приближений, представляя искомые периодические по Θ решения в виде разложения по степеням малой амплитуды ϵ возмущения плотности: $x = \epsilon\cos\Theta + \epsilon^2 x_2 + \ldots$, $y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \ldots$, $\Omega = \Omega_0 + \epsilon^2\Omega_2 + 0[\epsilon^4]$, $\epsilon \ll 1$.

В первом порядке по ϵ из уравнений (7) получаем: $y_1 = \Omega_0 \cos\Theta$, $\Omega_0 = \pm(2e^2 N_0 \Sigma(k)/mV_0^2)^{1/2}$ (линейное дисперсионное соотношение (4)). С точностью $\sim \epsilon^2$ решение имеет вид:

$$x = \epsilon\cos\Theta + \epsilon^2 \frac{3}{4} \frac{\Sigma(k)}{\Sigma(k) - \Sigma(2k)} \cos 2\Theta + 0[\epsilon^3],$$

$$y = \epsilon\Omega_0\cos\Theta + \epsilon^2\left(-\frac{\Omega_0}{2} + \frac{\Omega_0}{4} \frac{\Sigma(k) + 2\Sigma(2k)}{\Sigma(k) - \Sigma(2k)} \cos 2\Theta\right) + 0[\epsilon^3].$$

Пучок, в котором возбуждены ВПЗ, приобретает дополнительную среднюю скорость $\langle y \rangle_\Theta = \epsilon^2(-\Omega_0/2)$, которая для быстрых и медленных волн имеет разный знак; энергия же волн в обоих случаях одинакова и положительна:

$$\langle E \rangle_\Theta - E_0 = \epsilon^2 e^2 N_0^2 \Sigma(k) + 0[\epsilon^4], \quad E_0 = N_0 mV_0^2/2 + e^2 N_0^2 \ln(R_0/R).$$

Здесь $\langle E \rangle_\Theta$ и E_0 – погонные плотности энергии возмущенного и невозмущенного пучка.

Нелинейная добавка к частоте Ω_2 определяется из системы (7) в третьем порядке по ϵ из условия отсутствия "вековых" решений, пропорциональных Θ. Нелинейное дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega_{\pm}(k) = kV_0 \pm \sqrt{\frac{2e^2N_0}{m}}\, k\Sigma^{1/2}(k)\left(1 + \epsilon^2\ \frac{3}{16}\ \frac{4\Sigma(2k) - \Sigma(k)}{\Sigma(k) - \Sigma(2k)}\right).$$

Согласно критерию Лайтхилла /2/, периодические волновые пакеты неустойчивы к самосжатию, если $v'_{\text{гр}}(k)\,\omega_2(k) < 0$, где $v'_{\text{гр}} = (\partial^2\omega/\partial k^2)_{\epsilon=0}$, $\omega_2 = \partial\omega/\partial(\epsilon^2)$. В данном случае это условие выполняется при всех $0 < k < \infty$.

Инкремент неустойчивости определяется из системы уравнений, описывающих эволюцию волнового числа k и амплитуды ϵ:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_{\text{гр}}(k)\ \frac{\partial k}{\partial z} + \omega_2(k)\ \frac{\partial \epsilon^2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \epsilon^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(v_{\text{гр}}(k)\,\epsilon^2\right) = 0.$$

Из этой системы, линеаризованной по малым возмущениям k, ϵ вида: $k = k_0 + \delta k$, $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon$, $|\delta k| \ll k_0$, $|\delta\epsilon| \ll \epsilon_0$, $\delta k, \delta\epsilon \sim \exp(i\kappa z - i\nu t)$, $\kappa \ll k$, получим линейное дисперсионное соотношение для волны модуляции: $\nu = v_{\text{гр}}(k_0)\kappa \pm \epsilon_0\kappa\sqrt{v'_{\text{гр}}(k_0)\omega_2(k_0)}$ (здесь знаки $\pm$ относятся и к быстрой, и к медленной ВПЗ).

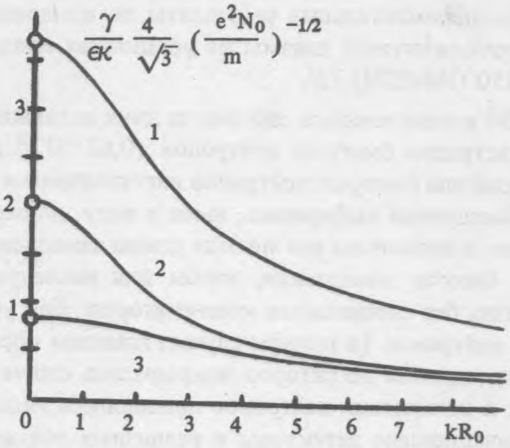

Рис. 1. Зависимость инкремента модуляционной неустойчивости от волнового числа ВПЗ при $R/R_0 = 0{,}1$ (1), $0{,}5$ (2), $0{,}9$ (3).

Зависимость инкремента $\gamma = \epsilon\kappa|v'_{\text{гр}}(k)\,\omega_2(k)|^{1/2}$ от волнового цисла k изображена на рис. 1. В пределе малых и больших k инкремент имеет вид:

$$\gamma(k \to 0) \to (\epsilon\kappa)\ \frac{3}{4}\ \left(\frac{2e^2N_0}{m}\ln\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{11}{4}\ \frac{k^2}{k_\perp^2}\right],$$

$$\gamma(k \to \infty) \to (\epsilon\kappa)\ \frac{1}{4}\ \left(\frac{3e^2N_0}{2mRk}\right)^{1/2}.$$

В заключение заметим, что периодические решения системы (1) – (3), удовлетворяющие условиям работы /1/ – "сохранения" тока и энергии электронов в системе покоя волны, – также неустойчивы, но при $k > k_*$, где k_* есть решение трансцендентного уравнения $\Sigma(k)\,[1 + 5\Sigma(k)/\Sigma(0)] = 4\Sigma(2k)\,[1 + \Sigma(k)/2\Sigma(0)]$. Здесь ситуация такая же, как в случае гравитационных волн на воде: длинные волны устойчивы к модуляциям, короткие – неустойчивы /3/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш а ф е р В. Ю. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 33 (1986).
2. L i g h t h i l l M. J. J. Inst. Math. Appl., 1, 269 (1965).
3. У и з е м Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 23 июля 1987 г.