

ОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТНОГО ТРИГГЕРА В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е.И. Волков, Т.Б. Перцова

Рассмотрение системы двух релаксационных нелинейных осцилляторов, у которых время нарастания медленной переменной много больше времени ее убывания, показало, что вблизи бифуркации рождения предельного цикла существует широкая область параметров системы, где обмен по медленной переменной приводит к сосуществованию двух автоколебательных режимов – синфазного и противофазного, периоды которых сильно различаются.

В настоящее время на основании многих экспериментальных данных можно с уверенностью говорить о колебательном характере ряда клеточных процессов /1/. К таким процессам относятся и процессы протекания клеточного цикла, в описании которых используют динамические модели, предполагающие наличие в клетке митотического осциллятора, задающего ритм деления клеток /2/. В дальнейшем мы будем основываться на модели, где ведущим автоколебательным процессом является перекисное окисление липидов в биологических мембранах /3, 4/ и предположим, что обмен метаболитами подчиняется законам линейной диффузии. Тогда, для двух сцепленных осцилляторов имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dx_i}{dt} &= \kappa + 0,5x_i y_i - x_i^2 - 1,5\gamma x_i / (x_i + \delta) + c_s (x_{i+1} - x_i), \\ \frac{dy_i}{dt} &= \nu_i - \kappa - 1,5x_i y_i - 0,5\gamma x_i / (x_i + \delta) - D y_i + c_f (y_{i+1} - y_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, 2 \pmod{2}$; $\epsilon \ll 1$; x_i, y_i – безразмерные концентрации реагирующих веществ.

Форма колебаний осцилляторов (рис. 1) является резко асимметричной, т.е. времена движения по различным ветвям изоклины для быстрой переменной и время перескока с одной ветви на другую, определяемое параметром ϵ в уравнениях (1), подчиняются соотношению $T_1 \gg T_3 \gg T_2$. Релаксационность системы определяется параметром, обратным к ϵ . Рассмотрим поведение системы (1) вплоть до значений $\epsilon = 0,01$.

Изучение релаксационных осцилляторов ограничивалось, как правило, специальным выбором параметров модели вдали от точки бифуркации рождения предельного цикла и при достаточно симметричной форме N-образной изоклины для быстрой переменной (см., напр., /5,6/). В /7/ рассмотрено взаимодействие несимметричных осцилляторов, но вдали от точки бифуркации, а в настоящей работе проведено численное изучение системы (1), когда параметры ν_1, ν_2 выбраны вблизи нее.

Динамическое поведение осцилляторов, диффузионно связанных только по медленной переменной (рис. 2), характеризуется наличием области синхронизации на основном тоне. Период колебаний является усредненным по сравнению с периодами колебаний несвязанных осцилляторов (рис. 3). Для близких по параметру ν осцилляторов при достаточно больших силах связи c_s с режимом синфазной синхронизации сосуществует режим противофазной синхронизации. Выбор режима осуществляется системой в зависимости от начальной точки траектории. Можно указать следующую физическую картину образования противофазного режима. Неустойчивое стационарное состояние, которое находится внутри предельного цикла, при связи c_s расщепляется на три стационарных состояния, два из которых с увеличением c_s движутся по неустойчивому спадающему участку изоклины x в стороны устойчивых ветвей. Когда такое стационарное состояние находится вблизи траектории предельного цикла, осциллятор совершает малое колебание вблизи нее, второй осциллятор при этом проходит спадающий участок предельного цикла. Появление режима колебаний в противофазе зависит от близости к бифуркации: большая релаксационность и несимметрич-

ность траектории приводит к тому, что изображающие точки часто попадают в противофазное положение (x_1 велико, y_1 мало; x_2 мало, y_2 велико), но закрепиться в этом положении и дать устойчивый предельный цикл они могут только при сильной зависимости периода колебаний от добавки $c_s(x_{i+1} - x_i)$, вносимой связью по медленной переменной. Именно вблизи бифуркации и реализуется такая сильная зависимость T от параметров (рис. 3, кривая 1). Период противофазных колебаний в 1,1 – 1,5 раза больше периода синфазных колебаний (рис. 3) и сильно зависит от величины силы связи, увеличиваясь с ростом c_s . Область существования режима противофазной синхронизации увеличивается с ростом релаксационности. Этот режим не был обнаружен при $\epsilon = 0,5$, существовал в малой области изменения параметров при $\epsilon = 0,1$ и в значительной области при $\epsilon = 0,01$ (рис. 2).

При дальнейшем изменении параметров системы стационарное состояние передвигается на устойчивую

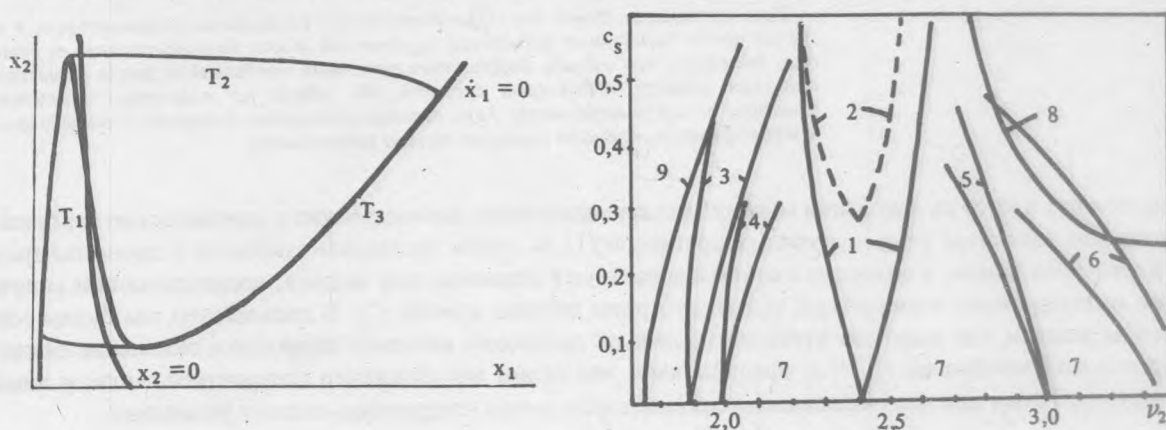


Рис. 1. Фазовый портрет системы при следующих параметрах: $\epsilon = 0,01$, $\kappa = 0,05$, $\gamma = 0,5$, $\delta = 0,15$, $c = 0,5$, $\nu_{1,2} = 2,4$, $D = 0,2$.

Рис. 2. Параметрический анализ системы (1) для $\epsilon = 0,01$ при связи по медленной переменной. Показаны границы областей: 1 – синфазной синхронизации, 2 – противофазной синхронизации, 3 – 6 – кратных режимов колебаний; 2:1 (3), 3:2 (4), 3:4 (5), 2:3 (6), 7 – квазипериодических колебаний, 8 – устойчивых стационарных состояний, 9 – вынужденных колебаний.

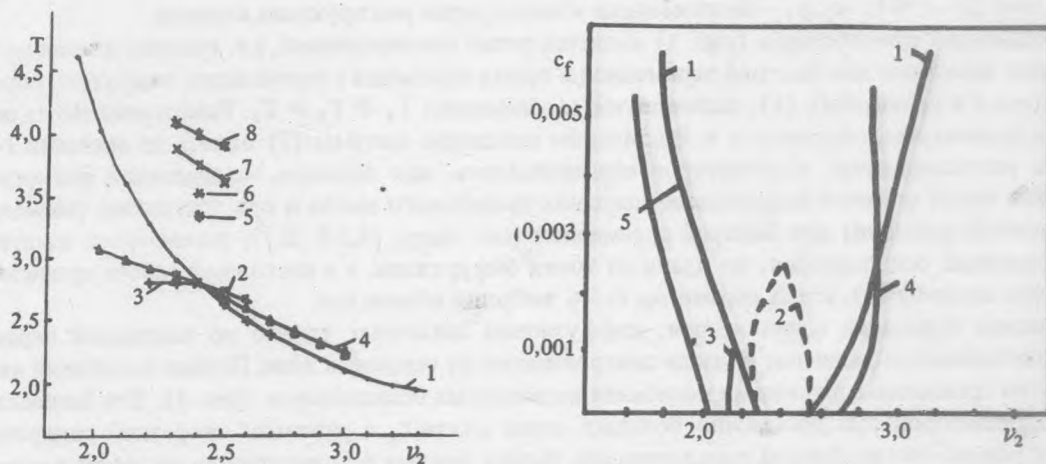


Рис. 3. Зависимость периода колебаний от параметра ν_2 при различных силах связи для $\epsilon = 0,01$: 1 – $c_s = 0,0$, $c_f = 0,0$, 2 – $c_s = 0,5$, $c_f = 0,0$, 3 – $c_s = 0,0$, $c_f = 0,005$, 4 – $c_s = 0,5$, $c_f = 0,005$, 5 – 8 – противофазные режимы для различных $c_s = 0,3$ (5), 0,4 (6), 0,5 (7), 0,6 (8).

Рис. 4. Параметрический анализ системы при связи по обеим переменным для $\epsilon = 0,01$. Показаны границы областей: 1 – область синхронизации, 2 – противофазной синхронизации, 3 – кратного режима 2:1, 4 – устойчивых стационарных состояний вынужденных колебаний.

ветвь изоклины $\dot{x} = 0$, и система приходит в устойчивое состояние, т.е. осцилляторы "запирают" друг друга. Режим противофазной синхронизации является, по-видимому, переходным от синфазной синхронизации к устойчивому стационарному состоянию для осцилляторов, находящихся вблизи точки бифуркации.

Параметрический анализ системы при связи по обоим переменным представлен на рис. 4. Как и следовало ожидать [5], наличие обеих связей привело к резкому уширению полосы синхронизации на основном тоне. На периоде колебаний, кроме явления усреднения, сказывается и явление захвата частоты более быстрым осциллятором. Режим противофазной синхронизации обнаружен при небольших величинах связи c_f по быстрой переменной и разрушается с ее увеличением.

Таким образом, если параметры релаксационных несимметричных осцилляторов выбраны недалеко от точки их перехода из положения ждущего мультивибратора в автоколебательный режим и эти осцилляторы сцеплены по медленной переменной, то образуется частотный триггер, в котором помимо исходной частоты колебаний присутствует вторая, более низкочастотная компонента с противофазными колебаниями. Если число осцилляторов велико, то можно ожидать появления еще большего количества частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М., Наука, 1978.
2. Tyson J. J., Kauffman S. J. Math. Biol., 1, 289 (1975).
3. Паламарчук Е. К. и др. Биофизика, 23, 845 (1978).
4. Волков Е. И., Мустафин А. Т. Изв. АН СССР, сер. биол., № 6, 806 (1985).
5. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М., Наука, 1975.
6. Grassman J. Bull. Math. Biol., 46, 407 (1984).
7. Волков Е. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 26 (1987).

Поступила в редакцию 31 июля 1987 г.