Краткие сообщения по физике № 11-1987 г.

УДК 535.853.4

О КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

А.А. Балагур, В.А. Щеглов

Рассмотрены три физические задачи, описываемые нелинейным уравнением Шредингера – дифракция Фраунгофера в среде с произвольной нелинейностью, распространение высших гармоник в коронирующих линиях электропередачи, возвратный удар молнии. Найдены точные количественные соотношения, отвечающие возникновению разрывных решений (пороговые условия).

Ряд самых разнообразных физических явлений описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ). Данное обстоятельство связано с волновой природой этих явлений и с нелинейным характером взаимодействия среды и поля. НУШ было выведено в теории волн на глубокой воде, в физике плазмы, нелинейной оптике, теории сверхпроводимости, физике низких температур и т.д.

В большинстве случаев при исследовании НУШ наибольший интерес вызывали решения типа солитонов /1, 2/. Вместе с тем, важны также и разрывные решения, которые в физическом плане соответствуют тем или иным критическим явлениям, например, эффекту самофокусировки в нелинейной оптике.

Цель данной работы – определить пороговые условия в трех нелинейных физических ситуациях, описываемых НУШ, – в случае нелинейной дифракции света в среде с произвольной нелинейностью, в задаче о распространении высших гармоник в коронирующих линиях электропередач, в задаче о возвратном ударе молнии. Поставленная цель достигается с помощью метода обратной задачи рассеяния /1–3/.

Нелинейная дифракция. Задача о нелинейной дифракции Фраунгофера при допороговых мощностях света в частном случае кубической нелинейности впервые поставлена и решена в /4/. В рамках параболического приближения в случае произвольной нелинейности НУШ для комплексной огибающей E электромагнитного поля, распространяющегося в среде с показателем преломления $n = n_0 + \delta n \sigma(E)$, имеет стандартный вид

$$2ik\partial E/\partial z + \partial^2 E/\partial x^2 = -k^2(\delta n/n_0)\sigma(E)E. \qquad (1)$$

В случае дифракции на щели метод обратной задачи рассеяния позволяет определить условие самофокусировки /3/:

$$k^2 l^2(\delta n/n_0)\sigma(E)\,|_{z=0} = 4(n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (2)$$

где l – ширина щели; n – порядок фокуса. В случае кубической нелинейности при n = 1 (2) переходит в известное выражение /5/. Фиксируя l, из условия (2) можно найти критические значения поля $E_n = E_{cr}^{(n)}|_{z=0}$, соответствующие фокусам n = 1, 2, 3, ... При малых полях в плоскости экрана картина распределения поля (как в ближней, так и дальней зонах), очевидно, мало отличается от классической. По мере увеличения поля в ближней зоне образуется волноводный канал, в котором формируются нелинейные моды. При значениях $E|_{z=0} \lessapprox E_1$ в области первого фокуса волновод распадается на филаменты. При строгом равенстве $E|_{z=0} = E_1$ энергия пучка полностью рассеивается на фокусе. Аналогичная картина имеет место при образовании второго, третьего и т.д. фокусов. В условиях, близких к критическим, угловая диаграмма направленности филаментов определяется соотношением /3/:

$$\Theta \cong \mathrm{arctg}\,([4(n\pi)^2 - k^2 l^2(\delta n/n_0)\sigma(E)\,|_{z=0}]/24(n\pi)^2 kl).$$

При достаточно больших значениях $E|_{z=0}$ картина поля синтезирует несколько наборов филаментов, соответствующих модам, сформированным на каждом участке между фокусами.

Волны в линиях электропередачи (ЛЭП). При описании процессов распространения волн в линиях электропередач, как правило, используют телеграфные уравнения

$$-\ \partial U/\partial x = Ri + L\partial i/\partial t, \qquad -\ \partial i/\partial x = GU + C\partial U/\partial t, \tag{3}$$

где U – напряжение; i – ток; R, L, C и G – эффективные погонные параметры линии.

При распространении высших гармоник в коронирующих линиях электропередач погонные параметры могут зависеть от напряжения U, при этом наиболее существенна зависимость динамической емкости C= = C(U). В силу этого система (3) становится нелинейной и сводится к НУШ с кубической нелинейностью. Введем подстановку

$$\partial U/\partial t = A\exp(i\,[\omega t - \sqrt{RG - \omega^2 LC}\,(x - x_0)]), \tag{4}$$

где $A = A(x,t)$ – медленно меняющаяся комплексная огибающая; $\omega = \sqrt{(RG - 2A_0\sqrt{-L\partial^2 C/\partial|U|^2}\,)/LC}$.

Комбинируя (3) и (4) с учетом неравенств $|\dfrac{\partial A}{\partial t}| < |\omega A|$, $|\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2}| < |\omega\dfrac{\partial A}{\partial t}|$, $|\omega| < \sqrt{(\dfrac{RC + LG}{2LC})^2 + \dfrac{RG}{LC}} - \dfrac{RC + LG}{2LC}$, получаем уравнение для A /6/

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\sqrt{RG - \omega^2 LC}}{\omega LC}\frac{\partial A}{\partial x}\right) - \frac{1}{2\omega LC}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\omega C\partial|U|^2}|A|^2 A = 0. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом случае НУШ записывается не для самой динамической переменной, а для огибающей ее производной $A \propto \partial U/\partial t$. Изменение знака у радикала под экспонентой в выражении (4) эквивалентно замене переменной x на –x в выражении (5), т.е. переходу в другую систему отсчета, не влияющему на физическую природу рассматриваемых явлений.

Уравнению (5) удовлетворяет функция /1, 6/

$$A = A_0\,\mathrm{sch}(2k_0^2\Psi_0[(x - x_0) - (\omega_0/2k_0 + V_0)t]), \tag{6}$$

где A_0, Ψ_0 и V_0 – определяются начальным возмущением,

$$k_0 = (1/2)(-\ 4A_0^2 L\partial^2 C/\partial|U|^2)^{1/4},\ \ \omega_0 = 2A_0\sqrt{-L\partial^2 C/\partial|U|^2}/LC,\ \ \omega = \sqrt{(RG - 2A_0\sqrt{-L\partial^2 C/\partial|U|^2}\,)/LC}. \tag{7}$$

Решения типа (6) при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ принято называть электромагнитными солитонами огибающей. Одним из интересных свойств таких решений является неустойчивость относительно бесконечно малых возмущений огибающей: монохроматическая волна частотой ω распадается через некоторое время на группу импульсов, распространяющихся со скоростью примерно в два раза меньшей фазовой скорости несущей и описываемых выражением (6), а затем через некоторый интервал времени они снова регенерируют монохроматическую волну. Этим объясняются наблюдаемые в зоне ионизации распространяющиеся вдоль провода светящиеся импульсы.

Если $\partial^2 C/\partial|U|^2 > 0$, то $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ (в противном случае $\mathrm{Re}\,\omega < 0$, рассматривается обратная волна, а физические следствия остаются теми же), $\partial U/\partial t$ согласно (6) экспоненциально растет и тлеющая корона переходит в импульсную.

При $\partial^2 C/\partial|U|^2 > 0$ уравнение (5) в точности совпадает с уравнением (1), если перейти в движущуюся систему координат, а задача Коши будет идентичной при задании начального возмущения для комплексной огибающей в форме скачка. Применительно к ЛЭП аналогом эффекта самофокусировки является ситуация, при которой распространение в ней сигналов сопровождается нарастанием крутизны переднего фронта до бесконечности и уменьшением скорости распространения до нуля при следующих критических значениях:

$$|\partial U/\partial t|_{cr} = 2n\pi/\sqrt{-\partial^2 C/\partial|U|^2 Ls}, \quad (8)$$

где s – длина переднего фронта огибающей; n = 1, 2, 3, ... При значениях $|\partial U/\partial t|$, близких к критическим, от точки x_{cr} и при t_{cr}, характеризующих исчезновение ("схлопывание") переднего фронта сигнала, будут распространяться стриммеры (на языке дифракционной задачи – филаменты). Развитие стриммеров, традиционно описываемое на языке магнитной гидродинамики, здесь не рассматривается.

Таким образом, все известные сопутствующие коронному разряду эффекты при заданной погонной емкости C(U) описываются решениями уравнения (6) и являются результатом конкуренции нелинейности и дисперсии.

Возвратный удар молнии. На основе развитых представлений получает объяснение возвратный удар молнии. Для образовавшегося проводящего канала справедливы телеграфные уравнения /7/:

$$-\partial i/\partial x = C\,\partial U/\partial t, \quad -\partial U/\partial x = i/\pi a^2 \sigma, \quad (9)$$

где a – радиус проводящего канала; σ – удельная проводимость. Если погонное сопротивление $R = 1/\pi a^2 \sigma$ мало изменяется во времени и по координате, то, следуя /6/, получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{RC}\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial C/\partial|U|}{C}\,|\Psi|\Psi = 0, \quad \Psi = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (10)$$

При замене переменной t на it' снова приходим к задаче Коши, рассмотренной в /3/. Следовательно, то, что видно и слышно при ударе молнии, это тоже эффект самофокусировки, наблюдаемый при следующих критических значениях:

$$|\partial U/\partial t|_{cr} = 4n^2\pi^2/(\partial C/\partial|U|)Rs^2, \quad (11)$$

где s – длина переднего фронта сигнала. В данном случае высших гармоник нет, а эффект "схлопывания" переднего фронта сигнала (самофокусировка) и появление ударных волн являются следствием конкуренции нелинейности и диссипативного размывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта, М., Мир, 1981.
2. Захаров В. Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., Наука, 1980.
3. Балагур А. А., Щеглов В. А. Препринт ФИАН № 224, М., 1986.
4. Манаков С. В. ЖЭТФ, **65**, 1392 (1973).
5. Пантел Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники. М., Мир, 1972.
6. Балагур А. А., Щеглов В. А. Препринт ФИАН № 339, М., 1986.
7. Gallimberti I. Jornal de Physique, c7, **40**, 193 (1979).

Поступила в редакцию 18 августа 1987 г.