Краткие сообщения по физике № 4-1987 г.

УДК 517.92

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕДУКЦИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРНЫМИ ВРЕМЕНАМИ

А.А. Полежаев

Показано, что если в системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений можно выделить три различных характерных временных масштаба изменения переменных, то такую систему можно при некоторых условиях свести к системе более низкого порядка даже и тогда, когда не выполняются условия теоремы Тихонова.

В прикладных задачах математическая модель исследуемого процесса часто имеет форму системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Если число уравнений велико, то исследование такой модели встречает значительные трудности. Однако если систему удается разбить на подсистемы, отличающиеся друг от друга характерными скоростями изменения своих переменных, то ее можно упростить, т.е. свести к системе более низкого порядка. В частности, это возможно при выполнении условий теоремы Тихонова /1/, когда в системе выделяется "быстрая" подсистема (эволюционирующая с малым характерным временем) с устойчивым при всех допустимых значениях остальных переменных стационарным решением.

В данной работе разобран еще один класс моделей, в котором возможна редукция, т.е. сведение к системе более низкого порядка, решения которой почти везде совпадают с решениями первоначальной системы (что означает "почти" – будет сказано в конце). Речь пойдет о системах, в которых выделяются три характерных масштаба времени, но стационарное решение самой "быстрой" подсистемы не везде устойчиво.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{x} = (1/\epsilon_1)P(x, y, z), \tag{1}$$

$$\dot{y} = (1/\epsilon_2)Q(x, y, z), \tag{2}$$

$$\dot{z} = R(x, y, z). \tag{3}$$

Здесь y – n-мерный вектор; P, Q и R – непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть система (1) – (3) обладает следующими свойствами: $1 \gg \epsilon_2 \gtrsim \epsilon_1$; при всех допустимых значениях x и z у стационарного решения уравнения (2) все собственные числа матрицы Якоби $\|\partial Q_i/\partial y_j\|$ имеют отрицательные действительные части, т.е. стационарное решение подсистемы (2) устойчиво по своим переменным.

Гиперповерхности $P(x, y, z) = 0$ и $Q(x, y, z) = 0$ пересекаются в $(n + 1)$-мерном пространстве по некоторой линии, которая параметризуется переменной z. Эта линия состоит из устойчивых участков, на которых все собственные числа матрицы Якоби

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\epsilon_1}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \cdots & \dfrac{1}{\epsilon_1}\dfrac{\partial P}{\partial y_j} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\epsilon_2}\dfrac{\partial Q_i}{\partial x} & \cdots & \dfrac{1}{\epsilon_2}\dfrac{\partial Q_i}{\partial y_j} \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

имеют отрицательные действительные части, и из неустойчивых участков, на которых хотя бы одно из собственных чисел имеет положительную действительную часть. Пусть переход от устойчивого к неустойчивому участку осуществляется в результате прохождения собственного числа через нулевое значение (т.е. не допускается бифуркация Хопфа). Покажем, что в этом случае систему (1) – (3) можно свести к двумерной.

Пусть $y(x, z)$ – решение системы $Q(x, y, z) = 0$. (Это решение по теореме о неявной функции всегда существует, поскольку определитель матрицы Якоби $\|\partial Q_i/\partial y_j\|$ отличен от нуля.) Введем функцию $F(x, z) = P(x, y(x, z), z)$. Тогда

$$\partial F/\partial x = \partial P/\partial x + (\partial P/\partial y_j)(\partial y_j/\partial x). \tag{5}$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Продифференцировав $Q = 0$ по x, получим

$$\partial Q_i/\partial x + (\partial Q_i/\partial y_j)(\partial y_j/\partial x) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y_j}{\partial x} = - \frac{\partial(Q)}{\partial(y_1, ..., y_{j-1}, x, y_{j+1}, ..., y_n)} \Bigg/ \frac{\partial(Q)}{\partial(y)} . \tag{6}$$

Здесь через $\partial(...)/\partial(...)$ обозначены определители соответствующих матриц Якоби. Подставив (6) в (5), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial(Q)}{\partial(y)} + (-1)^j \frac{\partial P}{\partial y_j} \frac{\partial(Q)}{\partial(x, y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n)} \right) \Bigg/ \frac{\partial(Q)}{\partial(y)} = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x, y)} \Bigg/ \frac{\partial(Q)}{\partial(y)} .$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{\epsilon_1} P, \frac{1}{\epsilon_2} Q)}{\partial(x, y)} \Bigg/ \frac{\partial(\frac{1}{\epsilon_2} Q)}{\partial(y)} , \tag{7}$$

где $\partial(P/\epsilon_1, Q/\epsilon_2)/\partial(x, y)$ – определитель матрицы (4).

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1/\epsilon_1) F(x, z), \\ \dot{z} &= R(x, y(x, z), z), \end{aligned} \tag{8}$$

где $y(x, z)$ – решение системы $Q(x, y, z) = 0$. Сопоставим решения системы (8) с решениями системы (1) – (3). В силу условия $1 \gg \epsilon_2 \gtrsim \epsilon_1$ в обоих случаях фазовые траектории распадаются на "медленные" участки, где характерным масштабом времени является скорость изменения переменной z, и "быстрые". Для системы (1) – (3) "медленные" участки с точностью до малой величины порядка ϵ_2 совпадают с устойчивыми участками линии пересечения нуль-изоклинных поверхностей $P = 0$ и $Q = 0$. В модели (8) "медленные" участки траектории лежат на участках изоклины $F = 0$, на которых $\partial F/\partial x < 0$. В силу выражения (7) и условия отсутствия бифуркации Хопфа при переходе от устойчивых к неустойчивым участкам в системе (1) – (3), "медленные" участки в обеих системах совпадают, а их устойчивость теряется при одном и том же значении переменной z.

В результате потери устойчивости медленного движения изображающей точки происходит ее срыв с линии пересечения изоклинных поверхностей $P = 0$ и $Q = 0$ в случае системы (1) – (3), или с изоклины $F = 0$ в случае системы (8). Этот срыв является "быстрым" участком фазовой траектории. При этом изображающая точка либо уходит на бесконечность (в обеих системах одновременно), либо перескакивает на другой устойчивый участок линии пересечения поверхностей $P = 0$ и $Q = 0$ (для системы (1) – (3)) или, в случае системы (8), на соответствующий участок изоклины $F = 0$.

Таким образом, система (8) при выполнении перечисленных условий эквивалентна системе (1) – (3) в том смысле, что обе имеют одинаковые предельные решения, например, стационарные точки или предельные циклы (отметим, что из этого следует невозможность странного аттрактора у системы (1) – (3), поскольку его нет у двумерной системы (8)). В обеих системах совпадают "медленные" участки фазовых траекторий. "Быстрые" участки описываются в них по-разному: хотя в обоих случаях эти участки лежат в плоскости $z = z_{кр}$ (значение переменной z, при котором теряется устойчивость "медленного" движения), но их форма и скорость движения по ним изображающей точки различны.

При этом проекция "быстрого" участка траектории системы (1) – (3) на плоскость (x, z) не всегда является отрезком, как в системе (8), а бывает острым "пичком". Соответственно "пички" могут наблюдаться на временных развертках переменных полной модели, но отсутствовать на развертках переменных редуцированной модели. (Такая ситуация наблюдалась при построении упрощенной модели нервного импульса и сопоставлении ее с более полной моделью и с экспериментальными результатами /2/.) Но на "быстрые" участки приходится очень малая (в меру ϵ_2 и ϵ_1) доля общего времени движения изображающей точки. Это и означает, что решение редуцированной системы (8) почти полностью совпадает с решением системы (1) – (3).

Автор благодарен Д.С. Чернавскому за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Математический сборник, 31, 575 (1952).
2. Иваницкий Г. Р., Крипский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М., Наука, 1978.

Поступила в редакцию 9 января 1987 г.