Краткие сообщения по физике № 6-1987 г.

УДК 535.4

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ

С.Н. Столяров

Получено и проанализировано точное аналитическое выражение для коэффициента отражения волн от диэлектрической структуры, состоящей из произвольного числа произвольно расположенных четвертьволновых и полуволновых слоев.

Отражение электромагнитных и акустических волн от слоистых диэлектрических структур рассматривалось в работах /1–5/. Аналитические выражения для коэффициента отражения по амплитуде от слоистого интерференционного покрытия получены лишь в частных случаях, когда это покрытие состоит либо из периодической последовательности двойных четвертьволновых слоев /1/, либо из одного, двух и трех четвертьволновых слоев /2/. Менее известно аналитическое выражение для этого коэффициента r_0, когда покрытие состоит из произвольного числа N четвертьволновых слоев /3–7/

$$r_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi). \tag{1}$$

Выражение для ξ имеет разный вид в зависимости от четности числа N слоев

$$\xi = \xi_1 = \frac{1}{n_0 n_{N+1}} \left(\frac{n_1 n_3 \dots n_N}{n_2 n_4 \dots n_{N-1}}\right)^2 = \frac{n_N^2}{n_0 n_{N+1}} \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{n_{2j-1}}{n_{2j}}\right)^2 \quad \text{при } N = (2M - 1),$$

$$\xi = \xi_2 = \frac{n_{N+1}}{n_0} \left(\frac{n_1 n_3 \dots n_{N-1}}{n_2 n_4 \dots n_N}\right)^2 = \frac{n_{N+1}}{n_0} \prod_{j=1}^{j=M} \left(\frac{n_{2j-1}}{n_{2j}}\right)^2 \quad \text{при } N = 2M, \tag{2}$$

где $M = 1, 2, \dots, N/2$ или $(N + 1)/2$; $n_j\,(j = 1, 2, \dots, N)$ – показатели преломления однородных прозрачных слоев в покрытии, толщины d_j которых удовлетворяют условию четвертьволновости

$$n_j d_j = (\lambda/4)(2m - 1) \quad \text{или} \quad \exp(2i\varphi_j) = -1, \quad \varphi_j = (\omega/c)\, n_j d_j, \tag{3}$$

где $\omega = 2\pi c/\lambda$ – частота падающей на покрытие волны, $m = 1, 2, \dots$. Величина n_0 есть показатель преломления среды (область $z < 0$), из которой нормально (вдоль оси z) на покрытие падает волна, а n_{N+1} – показатель преломления однородной среды позади покрытия, т.е. при $z > z_N = \sum_{j=1}^{j=N} d_j$.

Формулы (1) и (2) приведены в /3–6/ без вывода. Единственная попытка доказательства формул (1) и (2), данная в работе /7/, где они впервые приведены, не является достаточно обоснованной. Например, совсем не очевиден переход в /7/ от общей формулы (13) к окончательным аналитическим выражениям (14) и (15) типа формул (2) для ξ. Поэтому автор работы /7/ говорит о многочисленных количественных проверках этих формул. По-видимому, из-за этого формулы (1) и (2) не стали широко известными и используемыми. Целью данной заметки является строгое доказательство формул (1) и (2) и обсуждение ряда малоизвестных или новых следствий из них. Попутно также будет показано, что наличие в рассматриваемом покрытии любого числа полуволновых слоев с параметрами n_l и d_l $(l = 1, 2, \dots, F)$, удовлетворяющими условию

$$n_l d_l = \frac{\lambda}{2} m, \quad \text{или} \quad \exp(2i\varphi_l) = +1, \quad \varphi_l = \frac{\omega}{c} n_l d_l, \tag{4}$$

не меняет коэффициента отражения в формулах (1) и (2).

Рассмотрим рекуррентное соотношение между коэффициентами отражения r_j и r_{j+1} от двух соседних границ раздела, расположенных при $z = z_j$ и $z = z_{j+1}$ и разделяющих слои с $n = n_j$, n_{j+1} и n_{j+2}:

$$r_j = \frac{r_{j,j+1} + r'_{j+1}\exp(2i\varphi_{j+1})}{1 + r_{j,j+1}r'_{j+1}\exp(2i\varphi_{j+1})}, \tag{5}$$

где

$$r_{j,j+1} = \frac{n_j - n_{j+1}}{n_j + n_{j+1}}; \quad \varphi_{j+1} = \frac{\omega}{c}\, n_{j+1}d_{j+1}; \tag{6}$$

$d_{j+1} = (z_{j+1} - z_j)$; $r'_k = r_k\exp(-2i\Phi_k)$; $\Phi_k = (\omega/c)\, n_k z_k$; $k = j$ и $j + 1$; $j = 0, 1, 2, ..., N, (N + 1)$. Замена r_k на r'_k означает выбор начала отсчета в конце k-го слоя при $z = z_k$. Соотношение (5) получено из условий непрерывности полей на j-ой границе раздела двух сред с n_j и n_{j+1} при $z = z_j$. При наклонном падении волны под углом Θ_0 к оси z величины n_j везде заменяются на $n'_j = (n_j^2 - \beta^2)^{1/2} = n_j\cos\Theta_j$, где $\beta = n_0\sin\Theta_0 = n_j\sin\Theta_j$ при электрическом векторе волны, перпендикулярном плоскости падения. Для другой поляризации в фазы φ_{j+1} и Φ_j вместо n_j входит величина $n'_j = n_j\cos\Theta_j$, а в коэффициент $r_{j,j+1}$ френелевского отражения $n'_j/n_j^2 = \cos\Theta_j/n_j$.

Для доказательства формул (1) и (2) воспользуемся методом полной математической индукции. Для однослойного ($N = 1$), двухслойного ($N = 2$) или трехслойного ($N = 3$) покрытия из формул (1) и (2) получаются известные аналитические выражения (см. /2/, с. 93, 96–97). Покажем, что из справедливости формул типа (1) и (2) для Q слоев благодаря соотношению (5) автоматически получается справедливость таких же формул для $(Q + 1)$-го слоя. Выберем для этого из всего покрытия только ту его часть, которая начинается с j-го слоя и оканчивается полупространством с $n = n_{N+1}$. Пусть эта часть содержит Q четвертьволновых слоев, т.е. $Q = (N - j)$. Предположим, что коэффициент отражения r'_j от нее имеет вид (1)

$$r'_j = (1 - \xi^{(j)})/(1 + \xi^{(j)}), \tag{7}$$

где $\xi^{(j)}$, согласно (2), имеют вид (n_0 заменяется на n_j):

$$\xi_1^{(j)} = \frac{1}{n_j n_{N+1}}\left(\frac{n_{j+1}n_{j+3}\dots n_N}{n_{j+2}n_{j+4}\dots n_{N-1}}\right)^2 \quad \text{при } Q = (2P - 1),$$

$$\xi_2^{(j)} = \frac{n_{N+1}}{n_j}\left(\frac{n_{j+1}n_{j+3}\dots n_{N-1}}{n_{j+2}n_{j+4}\dots n_N}\right)^2, \quad \text{при } Q = 2P, \tag{8}$$

$P = 1, 2, ..., Q/2$ или $(Q + 1)/2$. Здесь и далее верхний индекс у ξ указывает на номер слоя, откуда падает волна.

Переход от числа слоев, равного Q, к числу слоев равному $Q + 1$, в данном случае означает, что к выбранным Q слоям необходимо добавить j-ый четвертьволновый слой, т.е. перейти к $(j - 1)$-му слою, откуда падает волна. Тогда в соотношение типа (5) для r'_{j-1} нужно, согласно (3), подставить $\exp(2i\varphi_j) = -1$, а вместо r'_j выражение (7). Пользуясь тем, что, согласно (8), имеет место соотношение

$$\xi_{1,2}^{(j-1)} = n_j/(n_{j-1}\xi_{2,1}^{(j)}), \tag{9}$$

для r'_{j-1} получим в результате выражение типа (7), в котором $\xi^{(j-1)}$ имеют вид (8), если в них заменить индекс j на $(j - 1)$. Таким образом формулы (1) и (2) доказаны. При этом следует только помнить, что добавление одного слоя к Q слоям меняет четность числа слоев. Поэтому величина $\xi_1^{(j)}$ должна переходить в $\xi_2^{(j-1)}$ (см. (9)), а затем в $\xi_1^{(j-2)}$ и, аналогично, $\xi_2^{(j)}$ – в $\xi_1^{(j-1)}$ и $\xi_2^{(j-2)}$.

Если к Q четвертьволновым слоям добавить теперь j-ый полуволновый слой, то нужно в формулу типа (5) для r'_{j-1} подставить выражение (7) и условие полуволновости $\exp(2i\varphi_j) = +1$ из (4). Тогда, используя соотношение

$$\xi_{1,2}^{(j-1)} = (n_j/n_{j-1})\,\xi_{1,2}^{(j)}, \tag{10}$$

следующее из формул (8), можно показать, что в выражение для r'_{j-1} не будет входить показатель преломления n_j полуволнового слоя. Таким образом, для покрытия, состоящего из произвольного набора четвертьволновых и полуволновых слоев, в формулы (2) входят показатели преломления только четвертьволновых слоев.

Отметим ряд малоизвестных результатов, следующих из формул (1) и (2). Так, отражательная способность покрытия возрастает с увеличением в нем числа последовательно чередующихся слоев с малым и большим показателем преломления, так как если в (2) $n_{2j-1} \ll n_{2j}$, то $r_0 \cong +1$, а при $n_{2j-1} \gg n_{2j}$ $r_0 \cong -1$. Коэффициент отражения от симметричной структуры ($n_0 = n_{N+1}$) с четным числом слоев ($N = 2M$) равен нулю при обращенном законе чередования слоев: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_M, n_M, \ldots, n_3, n_2, n_1$, а также в случае, когда в ней имеется четное число комбинаций из трех, пяти, семи и т.д. слоев, например, при $n_1 = n_4 = n_7 = \ldots$, $n_2 = n_5 = n_8 = \ldots$ и $n_3 = n_6 = n_9 = \ldots$. Рекуррентная формула (5) позволяет также учесть аналитически поглощение в слоях и малое отклонение от резонансных условий (3) и (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1970.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973.
3. Розенберг Г. В. Оптика тонкослойных покрытий. М., ГИФМЛ, 1958.
4. Крылова Т. Н. Интерференционные покрытия. Л., Машиностроение, 1973.
5. Кард П. Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин, Валгус, 1971.
6. Минков И. М. Оптика и спектроскопия, 37, вып. 3, 587 (1974).
7. Лисица М. П. ЖТФ, 24, вып. 10, 1837 (1954).

Поступила в редакцию 20 февраля 1987 г.