УДК 533.951

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПИРСА

Д. Н. Клочков, М. Ю. Пекар, А. А. Рухадзе

При достаточно общих предположениях получено дисперсионное уравнение линейной теории излучательной неустойчивости Пирса. Найден инкремент неустойчивости как функция сдвига продольного волнового числа медленной пучковой волны.

Излучательная неустойчивость Пирса является по своей природе вынужденной и нерезонансной [1 – 3]. Как следствие этого она может проявляться в различных пучковых и плазменно-пучковых системах, имеющих произвольную геометрию. Естественно, в окончательный ответ будут всегда входить геометрические параметры в виде форм-факторов. Многообразие систем порождает многообразие ответов и поэтому вынуждает искать наиболее общую форму дисперсионного уравнения, не зависящего от данной конкретной геометрии.

Построение линейной теории излучательной неустойчивости Пирса связано с исследованием линеаризованного по малому параметру Пирса дисперисонного уравнения [1 – 3]. В данной работе делается попытка обобщить полученные ранее результаты и получить линеаризованное дисперсионное уравнение неустойчивости наиболее общего вида.

Рассмотрим гладкий металлический волновод длины L, вдоль оси которого распространяется прямолинейный пучок моноэнергетических электронов, начальная скорость которых равна u. Волновод может быть как вакуумным, так и плазменным произвольного сечения, причем плазма может иметь любой профиль. Вся система помещена в однородное продольное магнитное поле, которое полностью препятствует поперечному движению электронов пучка (и плазмы, если таковая имеется). Для азимутально симметричного случая поле в волноводе может быть представлено через единственную компоненту поляризационного потенциала Герца [4]

$$\psi(t,z,r) = \sum_{\nu=1}^{4} \psi_\nu(r) \exp(-i\omega t + ik_\nu z) \tag{1}$$

по формулам

$$E_z = \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi, \ \ E_r = \partial_z \partial_r \psi, \tag{2}$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{c}\partial_t \partial_r \psi.$$

Индексы "1" и "2" соответствуют собственным волнам резонатора (электромагнитным или плазменным), причем первая волна прямая, а вторая обратная (отраженная). Индексы "3" и "4" соответствуют медленной и быстрой пучковым волнам, $\psi_\nu(r)$ – собственные мембранные функции волновода.

Рассмотрим случай бесконечно тонкого трубчатого пучка радиуса r_b. Отсутствие возмущений пучка по току и заряду на входной границе $z = 0$ дает два условия на амплитуды волн

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_\nu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}{(\omega - k_\nu u)^2} k_\nu A_\nu = 0, \ \ \sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_\nu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}{(\omega - k_\nu u)^2} A_\nu = 0. \tag{3}$$

Здесь $A_\nu = \psi_\nu(r_b)$. Если на входной границе резонатора находится металлическая сетка или фольга, то условие равенства нулю тангенциальной составляющей вектора электрической напряженности дает дополнительное условие

$$\sum_{\nu=1}^{4} k_\nu \psi'_\nu(r) = 0, \tag{4}$$

которое запишем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{4} k_\nu \left(\frac{\psi'_\nu}{\psi_\nu(r_b)} \cdot t\right) A_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^{4} k_\nu \epsilon_\nu(f) A_\nu = 0. \tag{4'}$$

$f \equiv f(r)$ – произвольная интегрируемая функция. Скалярное произведение здесь понимается в смысле

$$(f \cdot g) = \int\limits_{S_\perp} f(r) g(r) dS_\perp. \tag{5}$$

Интегрирование проводится по поперечному сечению резонатора $S_\perp$.

Уравнения (3), (4) определяют коэффициенты трансформации волн на входном электроде.

В случае слаботочных пучков, когда пирсовский параметр

$$\chi \equiv \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_\perp^2 u^2} \ll 1, \tag{6}$$

законы дисперсии волн в резонаторе определяются выражениями [1 – 3]

$$k_{1,2} = \pm a \pm \delta k_{1,2}, \tag{7}$$
$$k_{3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \delta k_3.$$

Параметр a совпадает с невозмущенным значением продольного волнового числа k_1 для волновода без пучка и определяется из дисперсионного закона собственной волны волновода. Так для резонатора, заполненного однородным диэлектриком или плазмой, имеет место [3]

$$a^2 = \epsilon_{zz}(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2, \tag{8}$$

$k_\perp$ – поперечное волновое число.

В формулах (7) имеет место условие $\delta k_{1,2} = O(\chi)$ и $\delta k_3 = O(\chi^{1/2})$, из которого следует $\psi_1(r) = \psi_2(r) + O(\chi)$. Поэтому для слабых пучков $\epsilon_1(f) = \epsilon_2(f) + O(\chi)$. При данных предположениях коэффициенты трансформации волн на входном электроде имеют вид

$$R_1^L = \frac{A_1}{A_2} = 1,$$

$$R_3^L = \frac{A_3}{A_2} = \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - a^2\right) u^2}{\omega^2 - a^2 u^2} \gamma^2 \frac{u \delta k_3}{\omega}, \tag{9}$$

$$R_4^L = \frac{A_4}{A_2} = -R_3^L.$$

Кроме того, предполагается, что $\omega \neq au$, т.е. черенковский резонанс для рассматриваемых частот отсутствует.

На выходе из резонатора $z = L$ сопутствующие пучку волны A_1, A_3 и A_4 частично трансформируются в обратную волну A_2 и частично – в волны излучающего рупора. В общем случае данный процесс можно записать в виде

$$A_2 e^{ik_2 L} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2}}^{4} \kappa_\nu A_\nu e^{ik_\nu L}, \tag{10}$$

Здесь $\kappa_\nu = \kappa_{1,3,4}$ – коэффициенты трансформации волн на границе $z = L$. Для пучков малой плотности, когда $\chi \ll 1$, пучок учитывается как малое возмущение, и поэтому он не влияет на отражающую способность рупора. Следовательно, коэффициент κ_1 можно приближенно принять равным коэффициенту отражения собственной волны резонатора от рупора в отсутствие пучка. Кроме этого, при условии $\chi \ll 1$ можно положить $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_b$. При этом как κ_b, так и κ_1 в общем случае являются функциями частоты ω. После подстановки значений (9) в уравнение (10) получаем дисперсионное уравнение линейной теории излучательной неустойчивости Пирса

$$D(\omega) = D_0(\omega) + D_1(\omega) = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$D_0(\omega) = \kappa_1 e^{iaL} - e^{-iaL} \tag{12}$$

невозмущенная часть дисперсионного уравнения. Уравнение $D_0(\omega) = 0$ определяет спектр собственных колебаний резонатора, а именно

$$a(\omega) = \frac{\pi n}{L} - \frac{1}{2L}\arg\kappa_1 + \frac{i}{2L}\ln|\kappa_1|. \tag{13}$$

Возмущенная часть дисперсионного уравнения

$$D_1(\omega) = -2i\kappa_b \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - a^2\right) u^2}{\omega^2 - a^2 u^2} \gamma^2 \frac{u\delta k_3}{\omega} \sin(L\delta k_3) e^{i\frac{\omega L}{u}} \tag{14}$$

определяет сдвиг частоты $\delta\omega$, создающий инкремент неустойчивости

$$\delta\omega = -\frac{D_1(\omega)}{\frac{\partial D_0(\omega)}{\partial\omega}}. \tag{15}$$

Полагая $a\frac{d\kappa_1}{da} \ll 1$, получаем из (14) и (15) окончательное выражение для инкремента излучательной неустойчивости Пирса

$$\delta\omega = (-1)^n \frac{|\kappa_b|}{\sqrt{|\kappa_1|}} \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - a^2\right) u^2}{\omega^2 - a^2 u^2} \gamma^2 \frac{d\omega}{da} \frac{u\delta k_3}{L\omega} \sin(L\delta k_3) e^{i\theta}. \tag{16}$$

Здесь

$$\theta = \frac{\omega L}{u} + \arg(\kappa_b) - \frac{1}{2}\arg(\kappa_1) \tag{17}$$

обозначает приведенный пролетный угол.

Полученное выражение (16) остается в силе для однородной в поперечном направлении системы, т.е. для случая $\psi_\nu(r) = \psi(r)$.

Анализ инкремента (16) показывает, что развитие неустойчивости не зависит от закона дисперсии волны $\omega = \omega(a)$, а связано со сдвигом δk_3 продольного волнового числа медленной пучковой волны. При этом системы можно разбить на два класса: короткие, для которых $L\delta k_3 \ll 1$, и длинные. В коротких системах инкремент неустойчивости квадратичен по сдвигу волнового числа δk_3, т.е. пропорционален плотности электронов пучка n_b. В работе [5] на основе численного моделирования неустойчивости в вакуумном волноводе найдено, что сценарий насыщения и развития неустойчивости также определяется параметром $L\delta k_3$.

Аналогичная ситуация имеет место при развитии апериодической неустойчивости Пирса. Как было показано в работах [6,7], образование, развитие, осцилляция и хаотизация виртуального катода зависят от численного значения параметра $\alpha = L\delta k_3 = \frac{\omega_b L}{u}$. Это подтверждает идею, высказанную в [5], что излучательная и апериодическая неустойчивости Пирса являются двумя разными режимами одной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Клочков Д. Н., Рухадзе А. А. Физика плазмы, **23**, 646 (1997).

[2] Клочков Д. Н., Пекар М. Ю. Физика плазмы, **23**, 650 (1997).

[3] Клочков Д. Н., Пекар М. Ю., Рухадзе А. А. Радиотехника и электроника, **44**, 386 (1999).

[4] Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., Наука, 1990, с. 336.

[5] Клочков Д. Н., Пекар М. Ю., Рухадзе А. А. ЖЭТФ, **115**, 2037 (1999).

[6] Cary J. R. and Lemous D. S. J. Appl. Phys., **53**, 3303 (1982).

[7] Friedel H., Grauer R., and Spatschek K. H. Phys. Plasmas, **5**, 3187 (1998).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 8 октября 1999 г.