*Краткие сообщения по физике № 8-1987 г.*

УДК 533.95

# К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВУХПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А.М. Игнатов

*Рассматривается неустойчивость двух встречных потоков плазмы в условиях слабой связи. Построено солитонное решение для огибающих неустойчивых волн.*

Пусть два одинаковых плоских тонких электронных пучка распространяются вдоль бесконечно сильного магнитного поля (ось z) навстречу друг другу со скоростями u и $-$ u. Пучки расположены в плоскостях $x = h/2$ и $x = -h/2$. В дальнейшем величины, относящиеся к разным пучкам, снабжаются индексом $\alpha = \pm 1$.

В условиях, когда скорости движения нерелятивистские, динамика пучков описывается уравнениями:

$$\partial\sigma_\alpha/\partial t + (\partial/\partial z)(\sigma_\alpha v_\alpha) = 0,$$
$$\partial v_\alpha/\partial t + v_\alpha \partial v_\alpha/\partial z = -(e/m)\,\partial\Phi/\partial z|_{x=\alpha h/2}, \tag{1}$$

где $\sigma_\alpha$ — поверхностная плотность, причем

$$\Delta\Phi = 0,\ \left\{\Phi\right\}_{x=\alpha h/2} = 0,\ \left\{d\Phi/dx\right\}_{x=\alpha h/2} = -4\pi e(\sigma_\alpha - \sigma_0). \tag{2}$$

Линеаризация системы (1), (2) в окрестности стационарного состояния $v_\alpha = \alpha u$, $\sigma_\alpha = \sigma_0$ приводит к дисперсионному уравнению

$$[(\omega - ku)^2 - g|k|][(\omega + ku)^2 - g|k|] = g^2 k^2 \epsilon^2(u), \tag{3}$$

где $g = 2\pi e^2\sigma_0/m$, $\epsilon(k) = \exp(-|k|h)$. В области малых длин волн $kh \gg 1$ неустойчивые решения (3) существуют в окрестности пересечения быстрой и медленной пучковых ветвей при $k \approx k_0$, где $k_0 = g/u^2$ (при этом $hg/u^2 \gg 1$):

$$\omega = \pm (i/2)[gk_0\epsilon_0^2 - u^2(k - k_0)^2]^{1/2},$$

где $\epsilon_0 = \epsilon(k_0)$. В противоположном пределе больших длин волн спектр имеет вид $\omega^2 = k^2 gh$ или $\omega^2 = 2g|k|$.

В процессе развития неустойчивости формируется волновой пакет с шириной $\epsilon_0 k_0$, причем как фазовая, так и групповая скорости волн этого пакета меньше $u \ll (gh)^{1/2}$. При увеличении амплитуды волн начинают играть роль нелинейные эффекты. Так как в данном случае спектр (3) нераспадный, основную роль играет самовоздействие волн (нелинейный сдвиг частоты) с $k \approx k_0$. В исходной системе уравнений (1), (2) кубическая нелинейность отсутствует, поэтому нелинейный сдвиг частоты обеспечивается самовоздействием волн через виртуальную нулевую и вторую гармоники. Учет нулевой гармоники фактически означает изменение основного состояния системы, т.е. торможение пучков.

Опуская стандартные промежуточные выкладки, приведем окончательный результат — укороченные уравнения /1/, описывающие нелинейную динамику пучковых волн в окрестности точки пресечения дисперсионных кривых:

$$\partial a_\alpha/\partial\tau + \alpha\, \partial a_\alpha/\partial\xi = i\alpha a_{-\alpha} + i\alpha a_\alpha|a_\alpha|^2, \tag{4}$$

где $\tau = g\epsilon_0 t/2u$, $\xi = \epsilon_0 k_0 z$. комплексные амплитуды связаны с исходными переменными следующим образом:

$$\sigma_a(t,z) = \sigma_0 + 2\sigma_0 \sqrt{\epsilon_0/3}\, \mathrm{Re}\,[a_a(\tau,\xi)e^{ik_0 z}] + 0(\epsilon_0).$$

Решения системы уравнений (4) будем искать в виде $a_a(\tau,\xi) = a_a(\xi - v\tau)$. Получающиеся при этом уравнения имеют два интеграла движения – гамильтониан $H = 2\mathrm{Re}(a_1 a^*_{-1}) + (1/2)\sum_a |a_a|^4$ и $P = (1/2)\sum_a (1 - av)|a_a|^2$, причем величина P пропорциональна импульсу системы. Вводя новые переменные $\psi = \arg a_1 - \arg a_{-1}$, $N = (1/2)\sum_\sigma (v - a)|a_a|^2$, имеем

$$\partial N/\partial\xi = \partial H/\partial\psi,\ \partial\psi/\partial\xi = -\partial H/\partial N. \tag{5}$$

где

$$H = 2\left(\frac{N^2 - P^2}{v^2 - 1}\right)^{1/2} \cos\psi + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N - P}{v - 1}\right)^2 + \left(\frac{N + P}{v + 1}\right)^2\right].$$

Солитонные решения (5) с $|a_a| \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$ существуют лишь при $P = 0$ и $|v| > 1$ и имеют вид:

$$N = \frac{2(v^2 - 1)^{3/2}}{v^2 + 1}\ \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{v^2 - 1}}\right),$$

$$\sin\psi = \mathrm{th}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{v^2 - 1}}\right).$$

При $|v| < 1$ и $|N| < P$ существует несколько типов солитонов, отличающихся топологическим зарядом, однако для них при $\xi \to \pm\infty$ величина $|a_a| \neq 0$.

В заключение отметим, что уравнения (4) описывают общий случай нелинейного взаимодействия двух систем со слабой связью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 27, 431 (1974).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 30 апреля 1987 г.