УДК 530.12:531.18

СИСТЕМА КООРДИНАТ, ДВИЖУЩАЯСЯ СО СКОРОСТЬЮ СВЕТА

А. М. Игнатов, А. А. Самохин, Д. Ю. Ципенюк

Обращается внимание на методическую неполноту при изложении вопроса о нелоренцовских преобразованиях в релятивистской механике. В качестве примера рассматривается релятивистская механика и электродинамика в изотропной системе координат, которую можно считать движущейся со скоростью света.

В дорелятивистской классической механике никаких формальных ограничений на величину скорости частиц не было. Наряду с волновой теорией света два века назад существовала и корпускулярная теория, которая смогла, в частности, полуколичественно предсказать эффект отклонения луча света, проходящего около массивного тела. Масса "световой частицы" из конечной формулы выпадала вследствие равенства инерционной и гравитационной масс. После установления факта постоянства конечной скорости света и формулировки релятивистских принципов ситуация изменилась. В релятивистской механике преобразования Галилея уступили место преобразованиям Лоренца, в соответствии с которыми "невозможно даже пользование системой отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости света" [1], так как при этом знаменатели в формулах Лоренца обратились бы в нуль.

Между тем использование систем координат, "движущихся" со скоростью света, вполне возможно, поскольку выбор системы координат не связан с теми ограничениями, которые присущи системам отсчета. Отличие между системами отсчета и системами координат должно быть общеизвестным [2 – 4], однако оно не всегда подчеркивается (и осознается) с необходимой полнотой. Об этом свидетельствует, в частности, название главы 4 в книге Бриллюэна [5] – "О крайне необходимом различении математических систем координат и физических систем отсчета". Сущность этого отличия в том, что система отсчета всегда связана с материальными телами, тогда как система координат представляет собой математический образ и, вообще говоря, с материальными телами не связана.

Преобразования Лоренца сохраняют не только величину, но и вид релятивистского интервала ds^2, т.е. диагональный вид метрического тензора g_{ij}, а также фазу световой волны $x - ct$. В то же время переход в систему координат, связанную с фотоном, изменяет вид g_{ij}. Но преобразования, изменяющие вид метрического тензора, традиционно рассматриваются не в релятивистской механике или электродинамике, а при изложении общей теории относительности. По этой причине, наверное, галилеевские и некоторые другие преобразования в релятивистской механике обычно остаются за пределами внимания во многих курсах теоретической физики и нередко воспринимаются почти как "неправильные" по сравнению с преобразованиями Лоренца. В настоящей работе релятивистская механика и электродинамика рассматриваются в изотропной системе координат, которую можно считать движущейся со скоростью света.

Используется пространство Минковского с плоской метрикой $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, т.е. интервал $-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, $x^0 = -x_0 = t$. Скорость света далее полагается равной единице. Изотропная система координат вводится при помощи замены переменных $x^i \to x'^i$, где

$$x'^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1),$$
$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - x^0), \qquad (1)$$
$$x'^\alpha = x^\alpha,\ \alpha = 2, 3.$$

Эта система координат выделена тем, что фронт световой волны, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси x, в переменных x' покоится.

В координатах (1) интервал имеет вид

$$-ds^2 = 2dx'^0 dx'^1 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 = g'_{ij}dx'^i dx'^j, \qquad (2)$$

где компоненты метрического тензора равны

$$g'^{ij} = g'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Контравариантные векторы по определению преобразуются так же, как и координаты (1). Операция поднимания и опускания индексов при помощи метрического тензора (3) приводит к перестановке компонент $i = 0, 1$, т.е. для любого вектора A

$$A'_0 = A'^1 \quad A'_1 = A'^0 \quad A'_\alpha = A'^\alpha,\ \alpha = 2, 3. \tag{4}$$

Поэтому ковариантные векторы преобразуются аналогично контравариантным:

$$A'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_0 + A_1) \quad A'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-A_0 + A_1) \quad A'_\alpha = A_\alpha. \tag{5}$$

Разумеется, со световой волной могут ассоциироваться и другие координатные системы, в том числе, и вводимые преобразованием Галилея $x' = x - ct$, $t' = t$. Все они, однако, менее симметричны, чем изотропные координаты, и, поэтому, соответствующие выражения типа (2 – 5) оказываются более громоздкими.

Уравнения движения для свободной частицы. В обычных координатах релятивистски инвариантное действие для свободной частицы имеет вид

$$S = -m\int ds = -m\int\sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \tag{6}$$

В изотропных координатах (1) это выражение можно переписать как

$$S = -m\int\sqrt{-2dx'^0 dx'^1 - (dx'^\alpha)^2}. \tag{7}$$

В отличие от (6) координаты x'^0 и x'^1 входят в действие (7) совершенно симметрично, т.е. параметризовать мировую линию частицы можно при помощи любой из них. Иными словами, если в выражении (6) явно выделена роль времени $x^0 = t$, то в (7) в качестве времени может выступать любая из координат x'^0 или x'^1. Обозначим, например, $x'^0 = \tau, x'^1 = \xi$, $\mathbf{r} = (x'^2, x'^3) = (x^2, x^3)$ и будем параметризовать мировую линию частицы при помощи τ. Тогда действие (7) примет вид

$$S = -m\int d\tau\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2} = \int d\tau L_0(\dot{\xi}, \dot{\mathbf{r}}),$$
$$L_0 = -m\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2}, \tag{8}$$

где точкой обозначается производная по τ. Для частицы, движущейся в положительном направлении настоящего времени $|(dx^1(x^0)/dx^0| < 1$, т.е. $\dot{\xi}(\tau) < 0$; иначе говоря, конус будущего в изотропных координатах переходит в область, определяемую неравенствами

$$\dot{\mathbf{r}}^2 + 2\dot{\xi} < 0,\ \dot{\xi} < 0. \tag{9}$$

Из условия обращения в нуль вариации действия (8) $\delta S = 0$ следуют уравнения движения для свободной частицы

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\xi}} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0, \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{m}{\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2}} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{m\dot{\mathbf{r}}_\alpha}{\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2}} = 0. \tag{11}$$

Уравнения движения могут быть также записаны в гамильтоновой форме. Импульсом, сопряженным координате ξ, является величина

$$q = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\xi}} = \frac{m}{\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2}}, \tag{12}$$

тогда как для поперечного импульса имеем

$$p_\alpha = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{r}_\alpha} = \frac{m\dot{r}_\alpha}{\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2}}. \tag{13}$$

Решая уравнения (12, 13) относительно $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\xi}$, получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{q}\mathbf{p} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}}, \tag{14}$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\mathbf{p}^2 + m^2}{2q^2} = \frac{\partial H_0}{\partial q},$$

где гамильтониан H_0 равен

$$H_0 = p_\alpha \dot{r}_\alpha + q\dot{\xi} - L_0 = \frac{\mathbf{p}^2 + m^2}{2q}. \tag{15}$$

Заметим, что H_0 по виду напоминает скорее нерелятивистский гамильтониан свободной частицы. Как видно из первого уравнения (14), импульс q является фактически полной поперечной массой частицы.

Пусть, например, в исходных координатах частица движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{V}$, т.е. $x^i = V^i t\,(i = 1, 2, 3)$. В соответствии с законом преобразования (1) имеем

$$\tau = \frac{t(1+V^1)}{\sqrt{2}},\ \xi = \frac{t}{\sqrt{2}}(-1+V^1), \tag{16}$$

откуда следует, что

$$\xi(\tau) = \frac{V^1-1}{V^1+1}\tau,\ x^\alpha(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{V^1+1}V^\alpha\tau,\ \alpha = 2,3. \tag{17}$$

Импульсы, сопряженные ξ и x^α (12, 13), имеют вид

$$q = \frac{m}{\sqrt{2}}\frac{1+V^1}{\sqrt{1-\mathbf{V}^2}},\ p^\alpha = \frac{mV^\alpha}{\sqrt{1-\mathbf{V}^2}}. \tag{18}$$

Как следует из выражений (16 – 18), а также непосредственно из независимости гамильтониана (15) от $\mathbf{r}, \xi$, в отсутствие сил движение частицы остается равномерным и прямолинейным. Поэтому рассматриваемую систему координат можно называть инерциальной, несмотря на недиагональность метрического тензора (3), что обычно [1] связывается с неинерциальностью системы.

Заряд в электромагнитном поле. Действие для частицы с зарядом e в электромагнитном поле с потенциалом A_i имеет вид

$$S = \int(-mds + eA_i dx^i). \tag{19}$$

В переменных $\tau, \xi, \mathbf{r}$ это действие записывается как

$$S = \int d\tau L,\ L = -m\sqrt{-2\dot{\xi} - \dot{\mathbf{r}}^2} - e\Psi + e\Lambda\dot{\xi} + eA_\alpha\dot{r}_\alpha, \tag{20}$$

где, в соответствии с (5),

$$\Psi = -A'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - A_1)\ \ \Lambda = A'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + A_1) \tag{21}$$

и $\phi = A^0$ – скалярный потенциал.

Из лагранжиана (20) следуют выражения для канонических импульсов

$$Q = \frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} = q + e\Lambda,\ P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial\dot{r}_\alpha} = p_\alpha + eA_\alpha, \tag{22}$$

из обращения которых получаем

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2}{(Q - e\Lambda)^2},\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{P} - e\mathbf{A}}{Q - e\Lambda}. \tag{23}$$

Гамильтониан для частицы в электромагнитном поле принимает теперь вид

$$H(\mathbf{P}, Q, \mathbf{r}, \xi) = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + m^2}{2(Q - e\Lambda)} + e\Psi, \tag{24}$$

где $\mathbf{A} = (A_2, A_3)$. В отличие от гамильтониана в обычной релятивистской механике [1], электромагнитное поле в (24) входит не только через обычную комбинацию $\mathbf{P} - e\mathbf{A}$ и Ψ, но и через содержащуюся в знаменателе компоненту 4-потенциала Λ, т.е. характер зависимости гамильтониана (24) от Λ соответствует изменению поперечной массы во внешнем электромагнитном поле.

Уравнения движения для частицы можно переписать и в более привычном виде. Если из импульсов (12, 13) составить трехмерный вектор $\mathbf{p} = (q, p_2, p_3)$, то из вариации действия (20) следуют уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = e\mathbf{E}' + e[\mathbf{v} \times \mathbf{H}'], \tag{25}$$

где $v^i = x'^i$ $(i = 1, 2, 3)$ и подразумевается, что пространство трехмерных векторов имеет эвклидову метрику. При этом электрическое и магнитное поля в изотропной системе координат выражаются через потенциалы обычным образом:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial \tau} - \nabla'\Psi,$$
$$\mathbf{H}' = [\nabla' \times \mathbf{A}'], \tag{26}$$

где оператор ∇' обозначает дифференцирование по координатам x'^i $(i = 1, 2, 3)$ и $\mathbf{A}' = (\Lambda, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$.

Уравнения Максвелла. Ковариантная форма записи уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 4\pi j^i, \quad \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{27}$$

где $j^i = (\rho, \mathbf{j})$ – четырехвектор плотности тока, из-за независимости метрического тензора (3) от координат сохраняется и в новых переменных x'. Это относится и к связи между тензором электромагнитного поля и потенциалом

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}. \tag{28}$$

В обычных координатах компоненты тензора электромагнитного поля равны

$$F_{12} = H_3, \ F_{13} = -H_2, \ F_{23} = H_1, \ F_{\alpha 0} = E_\alpha \ \ (\alpha = 1, 2, 3). \tag{29}$$

В соответствии с законом преобразования (5) компоненты этого тензора в изотропных координатах принимают вид

$$F'_{10} = F_{10},\ F'_{\alpha 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{\alpha 0} + F_{\alpha 1}),$$

$$F'_{1\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-F_{0\alpha} + F_{1\alpha}),\ F'_{23} = F_{23}. \tag{30}$$

Легко видеть, что введенные выше электрические и магнитные поля в изотропной системе (26) связаны с компонентами F'_{ij} соотношениями, аналогичными (29). Однако уравнения для полей $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ оказываются достаточно громоздкими и по виду отличаются от уравнений Максвелла. Это отличие обусловлено, в конечном счете, нековариантной формой записи уравнений Максвелла.

В терминах потенциала уравнения для электромагнитного поля записываются как

$$\Box A^i = -4\pi j^i, \tag{31}$$

где выбрана лоренцевская калибровка потенциала

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0 \tag{32}$$

и оператор Даламбера $\Box = \triangle - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

При переходе к изотропным координатам уравнения (31) и (32) сохраняют свой вид, а $\Box = \triangle_\perp - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial_\tau}$. Таким образом, уравнения для полей, входящих в лагранжиан (20), записываются в виде

$$\Box\Psi = 4\pi j'^1,$$

$$\Box\Lambda = -4\pi j'^0, \tag{33}$$

$$\Box A_\alpha = -4\pi j_\alpha \ \ (\alpha = 2, 3)$$

и условие калибровки (32) записывается как

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\tau} - \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \nabla_\alpha A_\alpha = 0. \tag{34}$$

Движение частицы в плоской электромагнитной волне. Очевидно, что уравнения (33, 34) допускают частное решение в виде плоской волны. Это решение для волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет вид

$$\Psi = \Lambda = A_3 = 0, \;\; A_2 = F(\xi), \tag{35}$$

где $F(\xi)$ – произвольная функция.

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле волны (35), которое в исходных координатах имеет вид $A_2(x,t) = F((x-t)/\sqrt{2})$, $A_1 = A_3 = A_0 = 0$.

Поскольку гамильтониан (24) от поперечных координат r_α не зависит, соответствующие канонические импульсы являются интегралами движения. Полагая для простоты, что $P_\alpha = 0$, получаем $p_2 = -eF(\xi)$, $p_3 = 0$. Сам гамильтониан (24) в результате принимает вид

$$H(\xi, q) = \frac{e^2F^2(\xi) + m^2}{2q}. \tag{36}$$

Соответственно, уравнения движения записываются как

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{e^2F^2(\xi) + m^2}{2q^2},$$

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\frac{e^2}{q}F'(\xi)F(\xi). \tag{37}$$

Поскольку гамильтониан (36) является интегралом движения, уравнения (37) легко интегрируются в квадратурах. Пусть $H(\xi,\tau) = H_0$, где величина H_0 определяется начальными условиями. Выражая при помощи (36) q через H_0 и подставляя результат в первое уравнение (37), получаем

$$\dot{\xi}(\tau) = -\frac{2H_0^2}{e^2F^2(\xi) + m^2}. \tag{38}$$

Решение последнего уравнения записывается в неявном виде

$$e^2 \int d\xi \; F^2(\xi) + m^2\xi + 2H_0^2\tau = 0. \tag{39}$$

Пусть, например, в достаточно удаленном прошлом $t \to -\infty$ поле равно нулю (т.е. $F(\xi)|_{\xi\to\infty} \to 0$) и частица покоится в точке $x = 0$. В переменых (τ, ξ) этой точке соответствует предел $\tau = -\xi$, $\tau \to -\infty$. В соответствии с (18) импульс q в начальный момент времени равен $q = m/\sqrt{2}$, т.е. $H_0 = m/\sqrt{2}$. Этот выбор констант интегрирования приводит (39) к виду

$$e^2 \int\limits_{\xi}^{\infty} d\xi' \; F^2(\xi') + m^2(\xi + \tau) = 0. \tag{40}$$

Если электромагнитный пакет имеет конечную длительность, то $F(\xi)|_{\xi\to-\infty} \to F_0$. Поскольку электрическое поле волны (в обычных координатах) равно $E_2 = -\partial A_2/\partial t = F'(\xi)/\sqrt{2}$, величина

$$F_0 = -\sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \; E_2(\xi) \tag{41}$$

пропорциональна полной работе, совершенной полем над частицей. Из уравнения (38) при этом следует, что при $\tau \to +\infty$

$$\dot{\xi} = -\frac{m^2}{m^2 + e^2 F_0^2}. \tag{42}$$

В соответствии с преобразованием (18) скорость, приобретенная частицей после прохождения импульса поля, равна

$$v = \frac{e^2 F_0^2}{2m^2 + e^2 F_0^2}. \tag{43}$$

Рассмотренная выше задача, излагается, например, в [1] и во многих статьях, например, [6, 7]. Заметим, что при этом в [1] явно о переходе в изотропную систему координат ничего не говорится, хотя очевидно, что в результате такого перехода вычисления существенно упрощаются.

Использование различных систем координат в физике является обычной процедурой. Это могут быть осциллирующие, вращающиеся, сопутствующие, спрямляющие и другие системы. Целесообразность выбора конкретной параметризации пространства-времени и использование наиболее рациональной системы координат определяются свойствами данной системы. Между тем, вопрос о физическом смысле тех или иных координатных систем далеко не всегда очевиден и зачастую вообще не обсуждается. Строго говоря, нельзя надеяться, что произвольной системе координат можно придать какой-то определенный физический смысл, то есть, в частности, связать с математическим понятием – системой координат – физическое понятие – систему отсчета. Во всяком случае, в релятивистской механике система координат, полученная при помощи галилеевских преобразований, не может быть отождествлена с системой отсчета.

Авторы признательны В. Г. Михалевичу за внимание, которое способствовало появлению этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля,

[2] Б е р г м а н П. Г. Введение в теорию относительности, М., ГИИЛ, 1947.

[3] Ф о к В. А. Теория пространства, времени и тяготения, М., ГИФМЛ, 1955.

[4] С и н г Д ж. Общая теория относительности, М., ИИЛ, 1963.

[5] Б р и л л ю э н Л. Новый взгляд на теорию относительности, М., Мир, 1972.

[6] R a u B., T a j i m a T., and H o j o H. Phys. Rev. Lett., **78**, 3310 (1997).

[7] C h e n g Y. and X u Z. Appl. Phys. Lett., **74**, 2116 (1999).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 30 августа 1999 г.