УДК 533.9

ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ В КУЛОНОВСКОЙ ПЛАЗМЕ

С. А. Майоров

Получено аналитическое выражение для парных электрон-ионной и ион-ионной радиальных функций распределения в приближении бинарного взаимодействия подвижных частиц с неподвижным ионом на близких расстояниях.

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, состоящую из ионов с массой M, положительным зарядом ze и электронов с массой m, зарядом $-e$. Пусть в плазме также имеется неподвижный точечный заряд $Z_0e > 0$. Он создает вокруг себя сферически симметричное заряженное облако ионов и электронов, плотность в котором зависит только от расстояния до него r. Уравнение Пуассона для среднего потенциала $\varphi(r)$ иона имеет вид

$$-\Delta\varphi = 4\pi e[Z_0\delta(r) + zN_i(r) - N_e(r)]. \tag{1}$$

Для радиальной функции распределения частиц сорта a вокруг неподвижного заряда обычно используется распределение Больцмана [1]

$$N_a(r) = N_{a0}\exp(-z_a e\varphi/T_a), \tag{2}$$

где N_{a0} – средняя по объему плотность частиц, T_a – температура, φ – средний потенциал поля вокруг неподвижного заряда, $z_a = -1$ и z для электронов и ионов, соответственно. В приближении слабого взаимодействия $z_a e\varphi/T_a << 1$ экспонента в распределении (2) разлагается в ряд и уравнение Пуассона (1) имеет решение типа потенциала Юкавы:

$$\varphi(r) = \frac{Z_0e}{r}\exp(-r/r_D), \tag{3}$$

где радиус Дебая $r_D = (4\pi\sum\limits_a z_a^2e^2N_{a0}/T_a)^{-1/2}$ задает длину экранирования кулоновского поля неподвижного заряда [1]. Выражение для парной корреляционной функции g_{ab}

расстояния между подвижными частицами сорта a и неподвижными частицами сорта b с зарядом Z_0e для потенциала (3) имеет вид [1 – 3]

$$g_{ab}(r) = -\frac{z_a Z_0 e^2}{rT_a}\exp(-r/r_D) = -\frac{r_w}{r}\exp(-r/r_D), \tag{4}$$

где $r_w = \frac{zZ_0e^2}{T}$ обозначает классический радиус взаимодействия (длина Ландау). Выражение (4) справедливо при выполнении условий малости парных корреляций и тройных корреляций по сравнению с парными:

$$g_{ab} << 1, \quad g_{abc} << g_{ab}. \tag{5}$$

Линеаризация экспоненциальных функций в (2) и (4) дает физически разумный результат для потенциала взаимодействия частиц также и в области малых расстояний, где условия (5) не выполняются. Более того, учет в разложении членов более высокого порядка не имеет смысла (подробнее см. [3]). В идеальной плазме характерная длина релаксации импульса и энергии частиц много больше среднего расстояния между ними $N_a^{-1/3}$, поэтому в малой окрестности вблизи неподвижного заряда можно пренебречь силами со стороны всех других частиц. Траектории частиц и их плотность в достаточно малой окрестности неподвижной частицы определяются уравнениями движения в центральном поле.

Учитывая взаимодействие электронов только с неподвижным зарядом Z_0e, получим распределение плотности электронов вокруг него. Пусть все электроны имеют одинаковый модуль скорости V_0 и среднюю плотность N_{e0}. Поток электронов, имеющих прицельные параметры в интервале ρ, $\rho+\Delta\rho$, равен $2\pi\rho\Delta\rho N_{e0}V_0$. Выделим вокруг неподвижного заряда шаровый слой r, $r+\Delta r$, его объем равен $4\pi r^2\Delta r$. Радиальная скорость электронов в шаровом слое зависит только от его радиуса и определяется из решения задачи Кеплера [4]:

$$V_r = V_0\left(1 + \frac{2Z_0e^2}{mV_0^2 r} - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Каждый электрон, попадающий в шаровый слой, будет дважды пересекать его и находиться в нем в течение промежутка времени $\Delta t = 2\Delta r/V_r$. Плотность электронов $\Delta N_e(r,\rho,\Delta\rho)$, создаваемая в шаровом слое потоком $N_{e0}V_0$ с прицельными параметрами в интервале ρ, $\rho+\Delta\rho$, определяется числом частиц, попадающих в этот слой за единицу времени, временем нахождения частиц в нем и его объемом: $\Delta N_e(r,\rho,\Delta\rho) =$

$N_{e0}V_0\rho\Delta\rho/r^2V_r$. Интегрируя $\Delta N_e(r,\rho,\Delta\rho)$ по всем возможным прицельным параметрам в интервале $0<\rho<\rho_{max}$, где ρ_{max} определено условием $V_r=0$, получаем

$$N_e(r,V_0)=\frac{N_{e0}}{r^2}\int\limits_0^{\rho_{max}}\rho\left(1+\frac{2Z_0e^2}{mV_0^2r}-\frac{\rho^2}{r^2}\right)^{-1/2}d\rho=N_{e0}\left(1+\frac{2Z_0e^2}{mV_0^2r}\right)^{1/2}. \qquad (7)$$

Это распределение определяет также парную корреляционную функцию для электронов, имеющих скорость V_0. Если скорости электронов на большом расстоянии от заряженного центра имеют максвелловское распределение с температурой T, то (7) следует усреднить по скоростям. В результате получаем:

$$N_e(r,T)=\frac{2N_{e0}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left(x+\frac{Z_0e^2}{rT}\right)^{1/2}e^{-x}dx=N_{e0}I\left(\frac{Z_0e^2}{rT}\right). \qquad (8)$$

Интеграл $I(x)$ в (8) выражается через неполную гамма-функцию и имеет следующие асимптотики: $I(x)\approx 1+x$ при $x<<1$, $I(x)\approx\sqrt{x}$ при $x>>1$. Длина Ландау при столкновении электрона с ионом $r_w=\frac{Z_0e^2}{T}$; для парной корреляционной функции получаем

$$\begin{aligned} g_{ab}(r)&=\sqrt{r_w/r}-1 \quad \text{при} \quad r<<r_w,\\ g_{ab}(r)&=\tfrac{r_w}{r} \qquad\qquad \text{при} \quad r>>r_w. \end{aligned} \qquad (9)$$

Аналогично, для плотности ионов, имеющих скорость V_0, получаем

$$\begin{aligned} N_i(r,V_0)&=N_{i0}\left(1-\tfrac{2zZ_0e^2}{MV_0^2r}\right)^{1/2}, \quad \text{если} \quad r>\tfrac{2zZ_0e^2}{MV_0^2}\\ N_i(r,V_0)&=0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{если} \quad r<\tfrac{2zZ_0e^2}{MV_0^2}. \end{aligned} \qquad (10)$$

При максвелловском распределении ионов по скоростям их плотность вокруг неподвижного заряда равна

$$N_i(r,T)=\frac{4N_{i0}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_{min}}^{\infty}x\left(x^2-\frac{zZ_0e^2}{rT}\right)^{1/2}e^{-x^2}dx=N_{i0}\exp\left(-\frac{zZ_0e^2}{rT}\right), \qquad (11)$$

где область интегрирования определяется из условия положительности подкоренного выражения.

Для парной ион-ионной корреляционной функции, соответственно, имеем

$$g_{aa}(r)=\exp\left(-\frac{zZ_0e^2}{rT}\right)-1.$$

Задача о столкновении двух частиц сводится к задаче о рассеянии в центральном поле при замене массы одной частицы на приведенную массу двух частиц [1]. Таким образом, полученные корреляционные функции могут быть использованы для расчета корреляций между подвижными частицами.

Плотности электронов (8) и ионов (11), а также парные корреляционные функции имеют дебаевские асимптотики при расстояниях, больших радиуса взаимодействия Ландау $r_w = \frac{zZ_0e^2}{T}$ и меньших радиуса Дебая. Начиная с расстояний порядка и меньше длины Ландау, они радикально отличаются от дебаевских. Для корреляций разноименно заряженных частиц происходит переход от закона $g_{ab} \approx r_w/r$ (4) к корневой зависимости от расстояния: $g_{ab} \approx (r_w/r)^{1/2}$. Еще раз отметим, что использованное бинарное баллистическое приближение работает при расстояниях меньше межчастичного.

Полученный результат представляет интерес для пылевой плазмы, где отрицательный заряд пылинки может быть очень большим: $Z_0 \sim -10^6$ [5]. Область сильной корреляции ион-пылинка (противоположно заряженных) становится значительно больше и может в существенной мере определять характеристики пылевой плазмы. Однако размер пылевых частиц в плазме играет важную роль и взаимодействием потоков частиц с поверхностью нельзя пренебречь. Поэтому полученные аппроксимации парных корреляционных функций для пылевой плазмы следует модифицировать для учета взаимодействия частиц плазмы с поверхностью пылинки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., Наука, 1976.
[2] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М., Наука, 1982.
[3] Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М., Мир, 1974.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Наука, 1988.
[5] Цытович В. Н. УФН, **167**, N 1, 57 (1998).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 10 сентября 1999 г.