

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СЦЕПЛЕННЫХ ПО МЕДЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Е.И. Волков

Рассмотрено поведение двух нелинейных релаксационных осцилляторов, диффузионно-сцепленных по медленной переменной. Численными методами показано, что вдали от бифуркации рождения колебаний рост силы связи приводит к исчезновению всех колебательных режимов, кроме узкой полосы синхронных синфазных колебаний.

Явление синхронизации нелинейных колебаний давно привлекает внимание исследователей (см., напр., /1/). Однако основные усилия были направлены на изучение гармонических колебаний, к которым можно применить различные приближенные методы. Синхронизация релаксационных осцилляторов исследована недостаточно /2, 3/, хотя такие осцилляторы часто встречаются при изучении различных объектов, в частности, в биофизике /4/.

В настоящем сообщении рассмотрено простейшее взаимодействие двух несимметричных осцилляторов, предложенных в /5,6/ в качестве модели мембранного осциллятора, задающего ритм деления клеток. Система уравнений в безразмерной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i - 2x_i y_i - D x_i + C(x_{i+1} - x_i), \\ \epsilon \dot{y}_i &= \kappa + x_i y_i - y_i^2 - 2\gamma y_i / (y_i + \delta), \\ i &= 1, 2 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Не останавливаясь на биологическом смысле переменных модели /6/, перечислим формальные свойства системы (1), важные для дальнейшего изложения. Если значение параметра $\gamma > \kappa$, то в автономной системе (т.е. при $C = 0$) изоклина для переменной y принимает N-образный вид и в широкой области параметров в системе (1) имеется устойчивый предельный цикл, фазовый портрет которого приведен на рис. 1 для $\epsilon = 0,1$ и $\epsilon = 0,01$. Несимметричность осциллятора означает, что имеется не два характерных времени, как для традиционного релаксационного осциллятора, а три: T_1 – время движения по медленному участку изоклины, на котором y мало; T_2 – время перескока на другую ветвь изоклины ($T_2 \cong \epsilon$) и T_3 – время обратного движения по правой ветви изоклины. Важно, что $T_3 \ll T_1$. На рис. 2 приведена зависимость периода колебаний автономного осциллятора от величины A . В дальнейшем принято $A_2 = 8$ с тем, чтобы работать вдали от точки бифуркации рождения цикла. Изменяющимися параметрами являются A_1 и C , а остальные неизменны и одинаковы для обоих осцилляторов.

Исследование системы (1) проводилось стандартным образом: вычислялись стационарные состояния и характер их устойчивости, затем исследовались траектории с целью определения характера колебаний и их периода. Для анализа траекторий строили одну из возможных функций последования, а именно, фиксировали моменты времени t_i , при которых функции $x(t)$ (или $y(t)$) для каждого осциллятора достигают максимумов и минимумов. В случае неперiodических режимов вычислялись одномерные показатели Ляпунова, которые являются основным средством диагностики квазипериодических и хаотических режимов.

На рис. 3 представлены результаты расчетов полос синхронизации для $\epsilon = 0,1$. Аналогичная картина имеет место и для $\epsilon = 0,01$. Границы области синхронизации на основной частоте вычислены более подробно и изображены на рис. 4. Из представленных результатов расчетов видно, что при малых силах связи ($C \cong 0,1 \div 0,2$) система сцепленных осцилляторов ведет себя "классическим" образом, т.е. области синхронизации расширяются с ростом C , вытесняя квазипериодические решения. Однако при больших значениях C и для $\epsilon \leq 0,1$ область основной синхронизации перестает расширяться и даже сужается для $\epsilon = 0,01$.

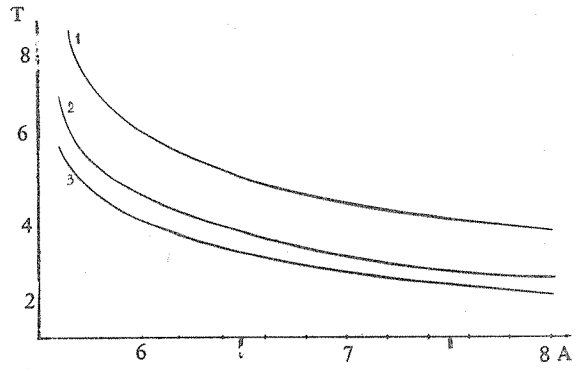
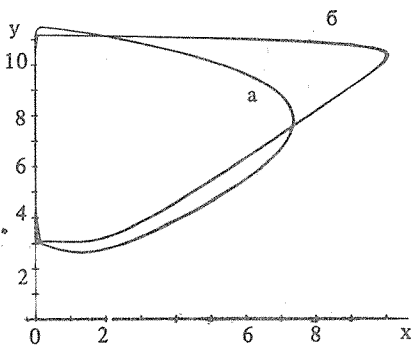


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) для $A = 8, D = 0,4, \kappa = 0,2, \gamma = 1,5, \delta = 0,15, C = 0, \epsilon = 0,1$ (а); $\epsilon = 0,01$ (б).

Рис. 2. Зависимость периода колебаний от параметра A для $\epsilon = 0,5$ (1); $\epsilon = 0,1$ (2); $\epsilon = 0,01$ (3).

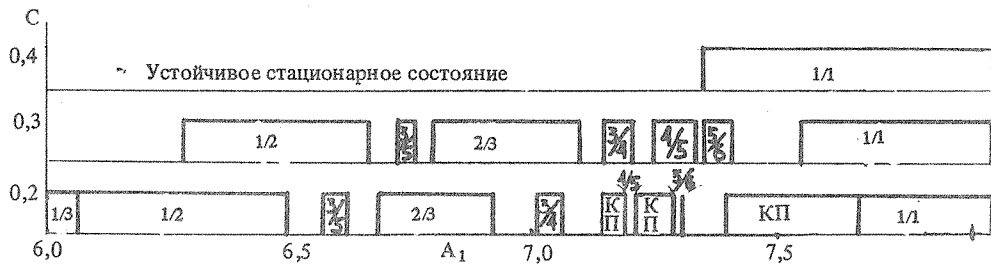


Рис. 3. Параметрический анализ системы (1) для $\epsilon = 0,1$; КП – квазипериодический режим.

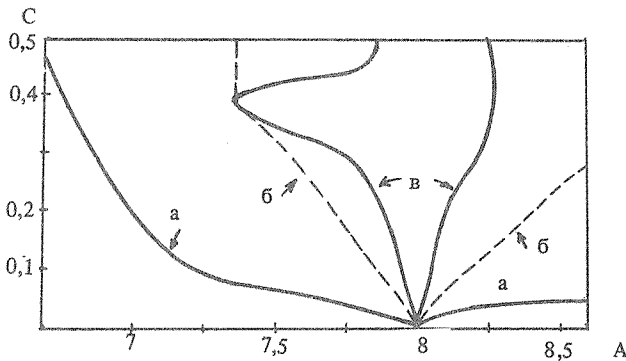


Рис. 4. Границы области синхронизации на основной частоте для разных значений параметра релаксационности: $\epsilon = 0,5$ (а), $0,1$ (б), $0,01$ (в).

Физическая причина такой структуры разбиения параметрического пространства кроется в несимметричности цикла. Рассмотрим две изображающие точки,двигающиеся по медленному участку цикла. Пусть изображающая точка более быстрого осциллятора находится впереди на некоторую величину Δx . После перехода на другую ветвь изоклины первая изображающая точка в силу того, что $T_3 \ll T_1$, быстро двинется вниз по циклу (рис. 1) и начнет в силу связи, описываемой членом $C(x_{i+1} - x_i)$, тормозить движение отстающей второй точки по медленной изоклине, если та не успеет за время порядка T_3 перескочить на вторую ветвь изоклины. Так как $T_3 \ll T_1$, то уже при небольшом отклонении A_1 от A_2 описанное "забегание назад" разрушает синхронный режим $1/1$ и порождает многочисленные режимы типа m/n , причем вблизи границы основной синхронизации, как правило, $m = n - 1$ и $m, n \geq 1$. С ростом релаксационности растет амплитуда скачка по быстрой переменной y , что приводит к еще более быстрому забеганию назад, и поэтому область синхронизации $1/1$ сужается при переходе от $\epsilon = 0,5$ к $\epsilon = 0,01$. Взаимное торможение движе-

ния по циклу растет с ростом параметра связи C и приводит сначала к увеличению бифуркационного значения, соответствующего появлению колебаний (любого типа), а затем, при достижении некоторого критического значения C_{cr} , равного 0,4 для $\epsilon \cong 0,1$ и 0,5 для $\epsilon = 0,01$, все режимы кратной синхронизации вымирают и система превращается в симметричный триггер с двумя устойчивыми состояниями. Синхронный режим на основной частоте сохраняется, но в очень узкой области параметров: $A \approx 7,4 \div 7,5$ для $\epsilon = 0,1$ и 7,85 для $\epsilon = 0,01$. Следует отметить, что устойчивые стационарные состояния, доминирующие при больших C , присутствуют на фазовой плоскости и при меньших значениях этого параметра: при $\epsilon = 0,1$ одно устойчивое стационарное состояние появляется уже при $C \approx 0,25$. Однако область притяжения этого состояния очень мала, и поэтому при произвольном выборе начальных условий реализуется, как правило, режим синхронных колебаний.

Итак, численное исследование показало, что если один из осцилляторов находится вдали от бифуркации рождения цикла, то процесс синхронизации таких осцилляторов при наличии диффузионной связи только по медленной переменной обладает тремя особенностями: 1) полоса синхронизации на основной частоте уменьшается с ростом релаксационности; 2) имеется широкая область параметров, в которой реализуются режимы с синхронизацией на кратных частотах; 3) при увеличении силы связи наблюдается взаимное подавление колебаний, приводящее к исчезновению всех режимов синхронизации на основной частоте.

В заключение отметим, что все перечисленные выше явления не являются строго специфичными для исследованной модели. Подавление колебаний отмечалось и при взаимодействии симметричных осцилляторов с прямоугольным фазовым портретом /4/. Однако резко несимметричная форма колебаний приводит к тому, что малозаметные режимы становятся доминирующими в широкой области пространства параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б л е х м а н Н. Н. Синхронизация в природе и технике. М., Наука, 1981, с. 351.
2. С и д о р о в а Г. А. Вестник МГУ, сер. III, 12, 665 (1971).
3. G r a s m a n J. Bull. Math. Biol., 46, 407 (1984).
4. Р о м а н о в с к и й Ю. М., С т е п а н о в а Н. В., Ч е р н а в с к и й Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М., Наука, 1975, гл. 12, 13.
5. П а л а м а р ч у к Е. К. и др. Биофизика, 23, 845 (1978).
6. В о л к о в Е. И., М у с т а ф и н А. Г. Изв. АН СССР, сер. биол., № 6, 805 (1985).

Поступила в редакцию 16 июня 1987 г.