Краткие сообщения по физике № 10-1987 г.

УДК 539.186

ФУНКЦИЯ ГРИНА РАДИАЦИОННОГО КАСКАДА

М.И. Сыркин

Изучается функция Грина двумерного радиационного каскада между ридберговскими уровнями в разреженной плазме. Развита теория возмущений по числу переходов в каскаде и построена аппроксимационная формула для функции Грина.

Населенность высоковозбужденных состояний в разреженной плазме (солнечная корона, планетарные туманности, плазма токамака) определяется, в основном, каскадом последовательных радиационных переходов. Теория одномерного каскада, т.е. переходов между уровнями со статвесовым распределением по орбитальному моменту изложена в /1,2/. Если же равновесие по l отсутствует, то реализуется двумерный каскад по n и l.

В случае накачки, плавно распределенной в области сравнительно больших n и l, двумерные каскады можно описывать как классическое течение в пространстве энергии и момента. Такой подход впервые предложен в /3/ и затем развивался в /4/ в применении к фоторекомбинации. При этом предполагалось, что каскад содержит большое число переходов и переходами с противоположным изменением n и l можно пренебречь (правило Бете /5/). В пределе сосредоточенной накачки в состояние с заданными n_p и l_p оба указанных условия не выполняются и требуется непосредственное решение квантового кинетического уравнения.

Ниже приводятся результаты такого решения и иллюстрируются основные особенности функции распределения. Предложена теория возмущений по числу переходов в каскаде и получена аппроксимационная формула для функции Грина.

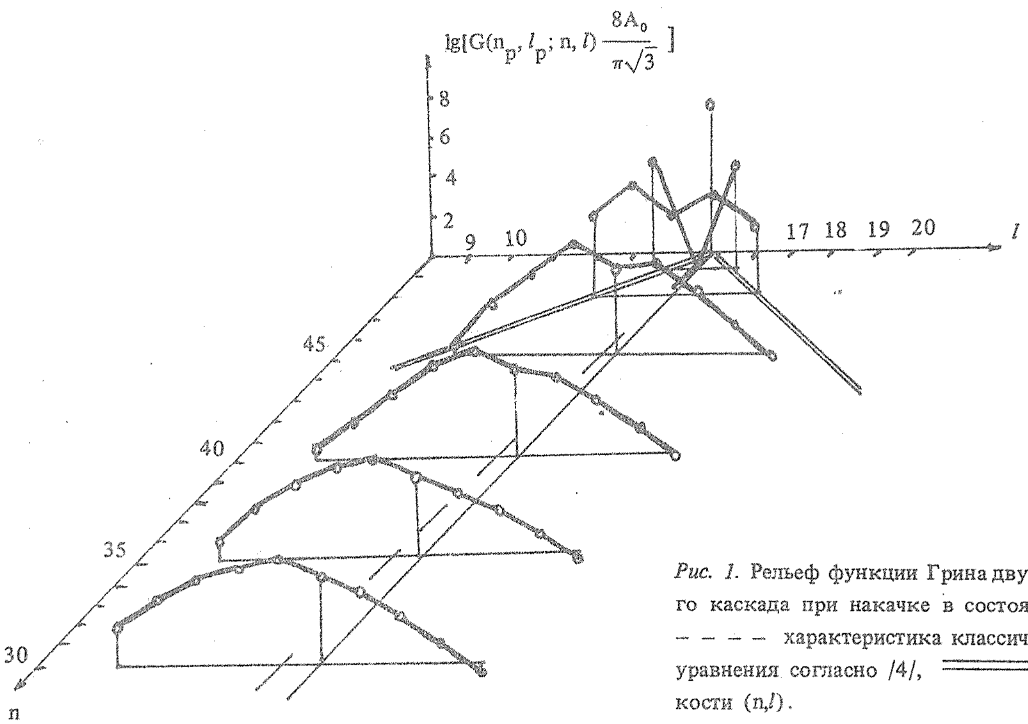

Рис. 1. Рельеф функции Грина двумерного радиационного каскада при накачке в состояние $n_p = 50$, $l_p = 15$: – – – – характеристика классического кинетического уравнения согласно /4/, ═══ фронты в плоскости (n,l).

Теория возмущений по числу переходов в каскаде. Кинетическое уравнение для функции Грина двумерного радиационного каскада имеет вид:

$$A(n,l)\,G(n,l) = \sum_{n'>n} [A(n', l+1 \to n, l)\,G(n', l+1) + A(n', l-1 \to n, l)\,G(n', l-1)] + \delta_{n,n_p}\delta_{l,l_p}. \quad (1)$$

В качестве вероятностей дипольных радиационных переходов воспользуемся квазиклассическими выражениями /6/:

$$A(n,l) = 8A_0/\pi\sqrt{3}\,n^3(l+1/2)^2,$$

$$A(n', l\pm 1 \to n, l) = 2A_0[(l+1/2)^4/9\pi^2](n'^{-2} - n^{-2})(n'n)^{-3}[K_{2/3}(\xi) \pm K_{1/3}(\xi)]^2, \quad (2)$$

$$A_0 = 0{,}8\cdot 10^{10} Z^4\ c^{-1}, \quad \xi = (l+1/2)^3(n'^{-2} - n^{-2})/6.$$

Формулы (2) находятся в удовлетворительном согласии с расчетом по точным водородным функциям /7/ даже для небольших $n < 10$.

На рис. 1 приведены результаты численного решения кинетического уравнения (1) с вероятностями (2). Видно, что населенность ограничена фронтами $n = \pm(l - l_p) + n_p$ в плоскости (n, l). Отметим, что вдоль фронтов уравнение (1) решается непосредственно в общем виде $G_f(n_p - |\Delta l|,\ l_p + \Delta l) = A^{-1}(n_p, l_p) \sum_{i=0}^{|\Delta l|-1} q[n_p - i,\ l_p \mp i \to n_p - (i+1), l_p \mp (i+1)]$, где $q(n', l\pm 1 \to n, l) = A(n', l\pm 1 \to n, l)/A(n,l)$, $\Delta l = l - l_p$. Максимум населенности располагается вблизи характеристики классического кинетического уравнения, проходящей через точку накачки, что согласуется с результатами работы /4/. В соответствии с правилом Бете, крыло функции Грина $l > l_p$ существенно подавлено по сравнению с $l < l_p$. Из рис. 1 также следует, что населенность быстро падает с увеличением отклонения от точки накачки $|\Delta l|$. Поэтому естественно ожидать, что основной вклад в населенность вносят каскады с минимальным числом переходов, совместимых с правилами отбора. Отсюда вытекает следующее приближенное решение для населенности (ограничиваемся $|\Delta l| \leqslant 2$):

$$\widetilde{G}(n_p, l_p) = 1/A(n_p, l_p),$$

$$|\Delta l| = 1:\ \widetilde{G}(n_p, l_p;\ n, l_p \mp 1) = A^{-1}(n_p, l_p)\,q(n_p, l_p \to n, l_p \mp 1),$$

$$|\Delta l| = 2:\ \widetilde{G}(n_p, l_p;\ n, l_p \mp 2) = A^{-1}(n_p, l_p) \sum_{n'=n_p-1}^{n+1} q(n_p, l_p \to n', l_p \mp 1)\,q(n', l_p \mp 1 \to n, l_p \mp 2), \quad (3)$$

$$\Delta l = 0:\ \widetilde{G}(n_p, l_p;\ n, l_p) = A^{-1}(n_p, l_p) \sum_{n'=n_p-1}^{n+1} [q(n_p, l_p \to n', l_p - 1)\,q(n', l_p - 1 \to n, l_p) +$$

$$+\ q(n_p, l_p \to n', l_p + 1)\,q(n', l_p + 1 \to n, l_p)]$$

и т.д. Сравнение (3) с точным расчетом показывает, что вплоть до $n < n_p/2$ ошибка для $\Delta l = 0, -1, -2$ не превышает 20%, а при $\Delta l = 1{,}2$ она $\lesssim 30\%$. Таким образом, теория возмущений по числу переходов в каскаде (3) показывает, что населенность при $l < l_p$ формируется, в основном, только за счет каскадных переходов в соответствии с правилом Бете, а при $l > l_p$ – против этого правила.

Аппроксимационная формула для функции Грина. С помощью разложения (3) и вероятностей (2) можно получить следующую аппроксимационную формулу для функции Грина:

$$G_a(n_p, l_p, n, l_p + \Delta l) = G_f(n_p - |\Delta l|, l_p + \Delta l)\,[\varphi_{\Delta l}(s)/\varphi_{\Delta l}(s_{\Delta l})\,]\exp[-\chi_{\Delta l}(s)\,],$$

$$s = \frac{(l+1/2)^3}{6}\quad [n^{-2} - n_p^{-2} - 2C_{\Delta l}|\Delta l| n_p^{-3}\,],\quad s_{\Delta l} = (l+1/2)^3\, n_p^{-3}/3|\Delta l|(a_{\Delta l} - 1)\,, \tag{4}$$

$$\varphi_{\Delta l}(s) = \begin{cases} s^{1/3}/(1 + s^{2/3}), & \Delta l = 0, \\ s^{-1/3}(1 + 1{,}57 s^{1/3})^{\mp 2}, & \Delta l = \pm 1, \\ s^{1/3}(1 + 4{,}6 s^{1/3})^{\mp 1}, & \Delta l = \pm 2, \\ s^{2k/3 - 1}\left(1 + 2{,}32\,\dfrac{\Gamma(2k/3)}{\Gamma(2k/3 + 1/3)}\, s^{1/3}\right)^{\mp 1}, & \Delta l = \pm k,\ \ k \geqslant 3; \end{cases}$$

$$\chi_{\Delta l}(s) = \begin{cases} 2s, & |\Delta l| \leqslant 1, \\ 2s + s^{1/2}, & \Delta l \geqslant 2, \\ s, & \Delta l \leqslant -2, \end{cases}$$

где $C_{\Delta l} = 1 - 1/[\,|\Delta l|(a_{\Delta l} - 1)\,]$, кроме $C_0 = C_2 = 0{,}8$, $C_{\pm 1} = 0$, и $a_{\Delta l} = |\Delta l|^{1/(0{,}67|\Delta l| - 1)}$. Формула (4) обеспечивает для $\Delta l = -1$ погрешность $\lesssim 10\%$, для $\Delta l = 0,\ 1,\ \pm 2$ ошибка больше, но в среднем $\lesssim 30\%$. Область применимости аппроксимационной формулы (4) $l_p \lesssim n_p^{2/3}$, за исключением $l_p = 0$.

Автор признателен И.Л. Бейгману за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М., Наука, 1979.
2. Бейгман И. Л. Труды ФИАН, 179, 160 (1987).
3. Беляев С. Т., Будкер Г. И. В кн. Физика плазмы и проблема УТР, под. ред. М.А.Леонтовича, М., изд. АН СССР, 3, 4 (1958).
4. Кукушкин А. Б., Лисица В. С. ЖЭТФ, 88, 1570 (1985).
5. Бете Г., Солпитер Е. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., Физматгиз, 1960.
6. Гореславский С. П., Делоне Н. Б., Крайнов В. П. ЖЭТФ, 82, 1789 (1982).
7. Karzas W. J., Latter P. Astrophys. J. Suppl., 6, 167 (1961).

Поступила в редакцию 13 июля 1987 г.