Краткие сообщения по физике № 10-1987 г.

УДК 533.951

ОБ УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПУЛЬСАЦИЙ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ

В.П. Силин

Определена регуляризация особенности Рудакова – Кораблева в угловом распределении в условиях небольших значений турбулентного числа Кнудсена и отсутствия регуляризирующего вклада резонансных ионов.

В работе /1/, посвященной аналитической теории ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ), было получено, в частности, угловое распределение при малых значениях турбулентного числа Кнудсена

$$K_N = \frac{3\pi|eEn_e - \nabla(n_e\kappa T_e)|r_{Di}^2}{m_e n_e \omega_{Li} v_s r_{De}^2}$$

При этом было показано, что сингулярность такого спектра может устраняться благодаря нелинейному взаимодействию волн, обусловленному их индуцированным рассеянием на ионах. Это положение особенно стало важно после работы /2/, в которой показано, что после установления распределения резонансных ионов только такое нелинейное взаимодействие является единственной причиной регуляризации сингулярного углового распределения ИЗТ. В настоящем сообщении уточнено угловое распределение, что позволяет проводить описание не только на качественном уровне, но и на количественном в таких приложениях, когда регуляризация сингулярного спектра оказывалась существенной (см., напр., /1,3,4,5/).

В соответствии с /6,7/ спектр ИЗТ представим в виде

$$N(k) = \frac{2^{1/2}\pi^{3/2} n_e\kappa T_e r_{De}^5}{\omega_{Le} r_{Di}^2 (kr_{De})^4 (1+k^2r_{De}^2)^{3/2}} \left[\ln\frac{\sqrt{1+k^2r_{De}^2}}{kr_{De}} - \frac{0,5}{1+k^2r_{De}^2} - \frac{0,25}{(1+k^2r_{De}^2)^2}\right]\Phi(\cos\theta),$$

где θ – угол между k и вектором $eEn_e - \nabla(n_e\kappa T_e)$. Для функции $\Phi(\cos\theta)$, описывающей угловое распределение, согласно /1,2,7/ имеем уравнение

$$\int_0^x \frac{t\Phi(t)\,dt}{(x^2-t^2)^{1/2}}\left[\frac{t}{x^2}F(x^2) - 1\right] = 2K_N x^2, \qquad (1)$$

где

$$F(x^2) = 1 + A_1 + A_2x^2 + A_3x^4 + x^2\sqrt{1-x^2}(A_4 - A_3x^2)\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$A_1 = \frac{1}{8}(M_0 + 2M_1 - 3M_2); \quad A_2 = \frac{1}{16}(7M_0 - 78M_1 + 95M_2), \quad A_3 = \frac{1}{16}(-9M_0 + 90M_1 - 105M_2);$$

$$A_4 = \frac{1}{4}(-M_0 + 12M_1 - 15M_2), \quad M_n = \int_0^1 dx\Phi(x)x^{2n}.$$

В работе /1/ (а вслед за ней и в /8/) при решении уравнения (1) в пределе $K_N \ll 1$ использовалась аппроксимация $F(x^2) \cong F(1) = 1 + A_1 + A_2 + A_3 \equiv 1 + \epsilon$. Возникающее при этом отличие F от единицы приводило к регуляризации особенности углового распределения

$$\Phi(x) = \frac{8K_N}{3\pi x} \frac{d}{dx} \frac{x^4}{1+\epsilon-x}. \qquad (2)$$

При этом $\epsilon = (16K_N/3\pi)\ln(3\pi/16K_N)$.

Попытка найти поправку к этой функции, используя малость K_N, приводит в условиях, когда x близко к единице, к немалым добавкам. Это означает, что уточненное решение оказывается таким, что устранение сингулярности благодаря учету нелинейного взаимодействия отличается от описываемого формулой (2).

Найдем такое уточненное решение. После умножения уравнения (1) на $x(s^2-x^2)^{1/2}$ и интегрирования по x от нуля до s получаем:

$$\int_0^s t\Phi(t)\,dt\left[\frac{1+A_1}{s} + A_2 t + \frac{1}{2}A_3 t(t^2+s^2) + tJ(s^2,t^2) - 1\right] = \frac{8K_N}{3\pi}s^3, \qquad (3)$$

где

$$J(s^2,t^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\sqrt{1-f(s^2,t^2,\varphi)}\,[A_4 - A_3 f(s^2,t^2,\varphi)]\ln\frac{1+\sqrt{1-f(s^2,t^2,\varphi)}}{\sqrt{f(s^2,t^2,\varphi)}},$$

$f(s^2,t^2,\varphi) = \frac{1}{2}(t^2+s^2) - \frac{1}{2}(s^2-t^2)\cos\varphi$. Подставив в (3) $\Phi(t) = (8K_N/3\pi t)\,d\psi(t)/dt$ и учтя $\psi(0) = 0$, получаем

$$\psi(s)[1 + A_1 + A_2 s^2 + A_3 s^4 + s^2 J(s^2,s^2) - s]s^{-1} - \int_0^s dt\,\psi(t)\left(A_2 + \frac{1}{2}A_3(3t^2+s^2) + \frac{d}{dt}[tJ(s^2,t^2)]\right) = s^3.$$

Отсюда видно, что при s близком к единице $\psi(s) \sim (1 + A_1 + A_2 + A_3 + J(1,1) - s)^\lambda = (1+\epsilon-s)^\lambda$. При этом $J(1,1) = 0$, $\lambda = -1 - A_2 - 2A_3 - \left[\frac{d}{dt}(tJ(s^2,t^2))\right]_{t=s=1} = -1 - A_2 - 3A_3 + A_4 \equiv -1 - F'(1) \equiv$

$\equiv -1 + a$. Последняя формула означает, что правильное описание регуляризации углового распределения при $\cos\theta \to 1$ достигается с помощью аппроксимации $F(x^2) \approx F(1) - F'(1)(1-x^2)$. В результате получаем следующее угловое распределение:

$$\Phi(x) = \frac{8K_N}{3\pi x}\frac{d}{dx}\frac{x^4}{(1+\epsilon-x)^{1-a}}. \qquad (4)$$

Поскольку $\epsilon = M_1 - M_2$, a $a = M_0 - 9M_1 + 10M_2$, то для определения ϵ и a, являющихся малыми по сравнению с единицей, имеем следующие два уравнения: $\epsilon = (16K_N/3\pi a)(1-\epsilon^a)$, $a = 16K_N/3\pi\epsilon^{1-a}$. Отсюда следует

$$a = \ln 2/\ln(\epsilon^{-1}), \qquad (5)$$

и с логарифмической точностью получаем $\epsilon = (8K_N/3\pi\ln 2)\ln(1/K_N)$, что отличается численным множителем от возникавшего в формуле (2) выражения.

Формулы (2) и (4) практически неразличимы при $1 - x \gg \epsilon$. Поэтому они проводят к одинаковым коэффициентам переноса в формулах для плотности электрического тока и потока тепла. Напротив, при описании рассеяния излучения, поглощения излучения, а также нетеплового излучения плазмы с развитой ИЗТ использование формул (2) и (4) приводит в ряде случаев к различным результатам. В заключение укажем, что именно выражение (5) определяет тот параметр разложения, который определяет асимптотическое решение уравнения (1) для углового распределения ИЗТ в условиях малости турбулентного числа Кнудсена и отсутствия влияния резонансных ионов.

В частности, более точное учитывающее следующие поправки по параметру (5) по сравнению с (4) угловое распределение имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{8K_N}{3\pi x}\frac{d}{dx}[x(1-\frac{x}{1+\epsilon})]^{-1+a-2a^2} - x - x^2 - x^3 + \frac{a}{12}(x[1-12T(x)](1-\frac{x}{1+\epsilon})^{-1+a} -$$

$$- x + 11x^2 + 17x^3 + 9x^4)], \quad (6)$$

где

$$T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x \frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}[3y^2-4-\frac{2y^2-3y^4}{\sqrt{1-y^2}}\ \mathrm{in}\ \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}][2y^3-y-\frac{\pi}{2}(1-y^2)+$$

$$+\frac{(\pi/2)+\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}].$$

При этом входящие в формулу (6) параметры ϵ и a определяются уравнениями:

$$\epsilon = \frac{16K_N}{3\pi}[\frac{1-\epsilon^a}{a} - 2{,}3 - \frac{1}{2}T(1)],$$

$$a = \frac{16K_N}{3\pi}\epsilon^{-1+a}[1+a(\ln 4+\frac{1}{12}-T(1))].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Быченков В. Ю., Силин В. П. ЖЭТФ, 82, 1886 (1982).
2. Силин В. П., Урюпин С. А. Физика плазмы, 12, 1042 (1986).
3. Силин В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 59 (1983).
4. Быченков В. Ю., Силин В. П., Чокпарова Г. А. Физика плазмы, 10, 1088 (1984).
5. Быченков В. Ю., Чокпарова Г. А. Физика плазмы, 11, 952 (1985).
6. Быченков В. Ю., Силин В. П., Урюпин С. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 27 (1983).
7. Силин В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 38 (1985).
8. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В кн. Основы физики плазмы, доп. к т. 2, М., Энергоатомиздат, 1984, с. 5.

Поступила в редакцию 14 июля 1987 г.