

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДИОКОТРОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А.М. Игнатов, Д.С. Филиппычев

Исследуется взаимодействие колебаний трубчатого электронного пучка. Показано, что распадные процессы приводят к формированию стационарных состояний с сечением пучка в виде деформированного кольца.

Диокотронная неустойчивость возникает в условиях, когда электронный пучок (или ступок заряженной плазмы) трубчатой формы распространяется вдоль сильного (для электронов циклотронная частота много больше плазменной) внешнего магнитного поля B_0 . Под действием скрещенных полей — собственного электрического и внешнего магнитного — возникает поперечный дрейф частиц. Вследствие неоднородности электрического поля возникает шир скорости, который и является источником неравновесности.

Линейная теория диокотронной неустойчивости разработана достаточно подробно [1]. Если пучок имеет резкие границы и его плотность по сечению постоянна, то линейное возмущение представляет собой две поверхностные волны, распространяющиеся по внутренней и внешней границам, взаимодействие между которыми и приводит к неустойчивости.

В работе [2] развивалась нелинейная теория диокотронной неустойчивости. Показано, что при $k_z = 0$ (ось z направлена вдоль магнитного поля) в дрейфовом приближении вся динамика сводится к изменению формы границ пучка, а плотность остается постоянной (n_0). Уравнения контурной динамики, описывающие эволюцию границ, в линейном приближении дают известные инкременты и частоты, а следующие члены разложения по амплитуде возмущения позволяют учесть влияние взаимодействия колебаний на динамику неустойчивости.

В данной статье рассматривается один частный случай взаимодействия колебаний. Если внешние стенки волновода удалены достаточно далеко, то вблизи порога неустойчивости единственным существенным трехволновым процессом является генерация второй гармоники моды $l = 2$ (l — азимутальное волновое число) вблизи точки потери устойчивости моды $l = 4$. Уравнения контурной динамики при этом могут быть записаны в гамильтоновой форме (время t измеряется в единицах $B_0/4\pi e n_0$):

$$\partial c_a / \partial t = i a \partial H / \partial c_a^*, \quad \partial b_a / \partial t = i a \partial H / \partial b_a^* \quad (1)$$

где гамильтониан имеет вид [2]:

$$H = \sum_a \left[-\frac{1}{2} x^2 |c_a|^2 + \frac{1}{2} x^2 c_a c_a^* + \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) |b_a|^2 + \frac{1}{2} x^4 b_a b_a^* + 2 \operatorname{Re} (U_1^a b_a c_a^{*2} + U_2^a b_a c_a^{*2} + U_3^a b_a c_a^* c_a^*) \right] \quad (2)$$

Индекс $a = \pm 1$ обозначает внешнюю и внутреннюю границы пучка. В полярных координатах ρ, θ границы пучка связаны с амплитудами $c_a(t), b_a(t)$ соотношениями

$$\rho_a^2(\theta, t) = a_a^2 \left[1 + 2 \operatorname{Re} (\sqrt{2} x^a \exp(i\omega_0 t + 2i\theta) c_a(t) + 2 x^a \exp(2i\omega_0 t + 4i\theta) b_a(t)) \right] \quad (3)$$

где a_a — внешний и внутренний радиусы невозмущенного пучка, $x = a_{-1}/a_1$; $\omega_0 = (1 - x^2)/2$ — удвоенная средняя угловая частота вращения. Матричные элементы в (2) равны: $U_1^1 = (1/2)x(2x^2 - 1)$, $U_1^{-1} = -1/2x$, $U_2^a = -(1/2)\alpha x^{4+a}$, $U_3^a = -\alpha x^{2+a}$.

Уравнения (1) с гамильтонианом (2), по-видимому, неинтегрируемы — помимо H известен только один интеграл движения типа Мэнли — Роу $M = \sum_a (|c_a|^2 + 2|b_a|^2)$, связанный с инвариантностью относительно вращений, а фазовое пространство системы (1) восьмимерно.

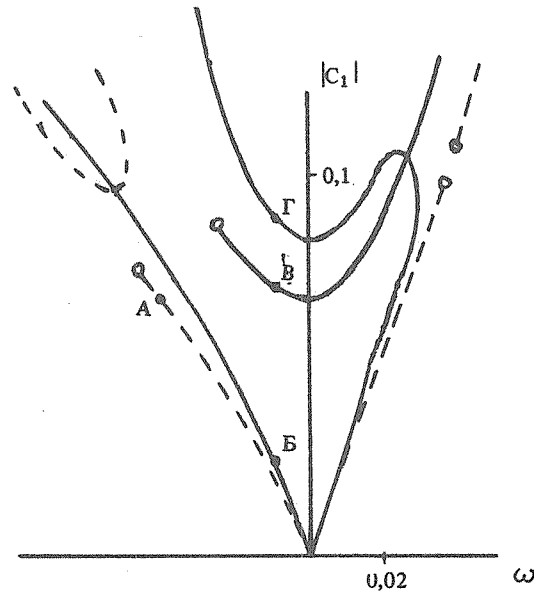


Рис. 1. Зависимость возмущения внешней границы пучка от частоты вращения.

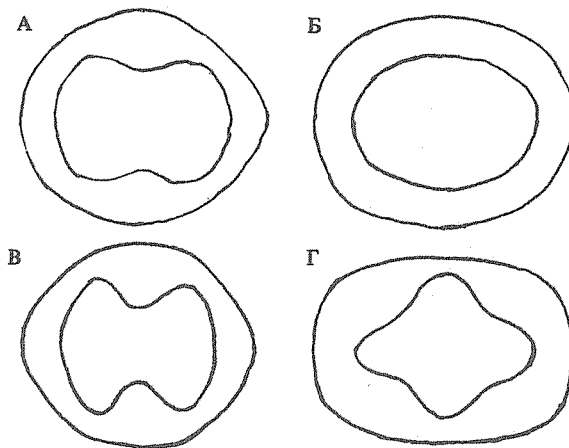


Рис. 2. Стационарные состояния пучка при различных x и ω .

Рассмотрим сначала линейную часть уравнений (1). Мода $l = 2$ двукратно вырождена — в выбранной системе отсчета, вращающейся со скоростью $-\omega_0/2$, собственные частоты для амплитуд c_α равны нулю. Собственная частота моды $l = 4$ (амплитуды b_α) равна ω_4 , где $\omega_4^2 = -(1/4)x^6 + (1/2 - x^2)^2$, т.е. при $x < x_4 = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0,6436$ эта мода устойчива, а при $x > x_4$ — неустойчива. В дальнейшем ограничимся исследованием распадных процессов только вблизи окрестности точки бифуркации $x = x_4$.

Рассмотрим стационарные решения (V -состояния) уравнений (1), представив амплитуды в виде $c_\alpha(t) = \exp(-i\omega t)c_\alpha^0$, $b_\alpha(t) = \exp(-2i\omega t)b_\alpha^0$, где c_α^0 и b_α^0 не зависят от времени, а ω — произвольный параметр. Система алгебраических уравнений на c_α^0 и b_α^0 имеет вид

$$-\omega c_\alpha^0 = a \partial H / \partial c_\alpha^{0*}, \quad -2\omega b_\alpha^0 = a \partial H / \partial b_\alpha^{0*}. \quad (4)$$

Амплитуды b_a^0 явно выражаются через c_a^0 и в результате преобразований система (4) сводится к одному алгебраическому уравнению четвертой степени для величины $\lambda = |c_{-1}^0/c_1^0| : f(\lambda, \omega) = 0$, при этом исходные величины выражаются через корни $\lambda_1(\omega)$. Явные выражения для коэффициентов этого уравнения и связи между c_a^0 , b_a^0 и $\lambda_1(\omega)$ не выписаны из-за их громоздкости.

Простой вид имеет только один корень при $\omega^2 \ll |\omega_4^2| \ll 1$. В этом случае $\lambda(\omega) \approx 1$, а сами амплитуды равны

$$c_a^0 = \sqrt{2} |\omega| e^{i\varphi} / (1 - x^2), \quad b_a^0 = x^a c_a^{02}, \quad (5)$$

где φ — произвольная фаза. Линеаризуя уравнения (1) в окрестности V-состояния (5) легко проверить, что при $x < x_4$ состояние (5) устойчиво, а при $x > x_4$ — неустойчиво.

В результате численного решения уравнения $f(\lambda, \omega) = 0$ получается зависимость $c_a^0(\omega)$, изображенная при $a = 1$ на рис. 1. Сплошной линией показаны корни с $x = 0,65 > x_4$, а пунктирной — с $x = 0,63 < x_4$. В некоторых случаях кривые на рис. 1 обрываются (эти места обозначены кружками) — при этом для какого-либо угла θ одна из величин (3) становится отрицательной или $\rho_1^2(\theta) < \rho_{-1}^2(\theta)$. Эти области заведомо лежат за пределами применимости разложения по степеням амплитуды.

Поперечные сечения пучка при различных x и ω изображены на рис. 2, причем буквы соответствуют отмеченным на рис. 1 точкам. Видно, что при одном и том же значении x и ω могут существовать различные, сильно отличающиеся по форме стационарные состояния.

Численное решение динамических уравнений (1) показывает, что V-состояния с $x < x_4$ устойчивы. Если начальные значения амплитуд c_a , b_a лежат в окрестности V-состояния, то возникают нелинейные колебания с сильным обменом энергией между модами $l = 2$ и $l = 4$. Если же $x > x_4$, то V-состояния неустойчивы — малые возмущения нарастают быстрее экспоненты и траектории (1) выходят за пределы применимости теории возмущений.

В заключение отметим, что, поскольку уравнения, описывающие динамику заряженной плазмы в дрейфовом приближении, совпадают с уравнениями Эйлера для двумерной несжимаемой жидкости, полученные здесь результаты применимы и в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. М., Мир, 1978.
2. Игнатов А. М. Препринт ИОФАН № 180, М., 1986.

Поступила в редакцию 1 сентября 1987 г.