Краткие сообщения по физике № 10-1986 г.

УДК 537.312.62

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ И КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ЗАРЯДА

А.М. Гулян*, Г.Ф. Жарков, Г.М. Сергоян**

Исходя из требований калибровочной инвариантности величин, фигурирующих в динамической теории сверхпроводящего состояния, найден добавочный нелинейный член в уравнении для параметра порядка вблизи критической температуры.

При описании динамики неравновесных сверхпроводников широко применяются нестационарные уравнения типа Гинзбурга – Ландау (см., например, /1–7/). Уравнение для параметра порядка Δ вблизи T_c записывается в виде

$$-\frac{\pi}{8T_c}\left[\frac{\partial}{\partial t}-D(\vec{\nabla}-2iA)^2\right]\Delta+\left[\frac{T_c-T}{T_c}-\frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2}|\Delta|^2\right]\Delta+\kappa=0. \tag{1}$$

Здесь κ – так называемый аномальный член, который имеет вид

$$\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{4\pi i}\left\{[f_1(\epsilon)-f_1^0(\epsilon)](f^R-f^A)_\epsilon-f_2(\epsilon)(f^R+f^A)_\epsilon\right\}, \tag{2}$$

где $f_1^0(\epsilon)=\mathrm{th}(\epsilon/2T)$. Функции f_1 и f_2 (связанные с неравновесной функцией распределения электронов) и спектральные функции $f^R\pm f^A$ соотносятся с пропагатором $\hat{g}_\epsilon$ /8/ как

$$\hat{g}=\hat{g}^R*\hat{F}-\hat{F}*\hat{g}^A,\quad \hat{F}=f_1\hat{1}+f_2\hat{\tau}_3,\quad \hat{g}^{(R,A)}=\begin{pmatrix} g & f\\ -f^+ & \bar{g}\end{pmatrix}^{(R,A)}, \tag{3}$$

причем $\hat{\tau}_3$ – матрица Паули, а символ $*$ означает свертку по времени согласно

$$(A*B)_{t_1t_2}=\int A(t_1t_3)B(t_3t_2)dt_3. \tag{4}$$

Проинтегрированная по энергии $\xi=v_F(p-p_F)$ функция Грина $\hat{g}$ удовлетворяет известным кинетическим уравнениям Элиашберга /9/.

При дальнейших преобразованиях (1), (2) в /2–6/ не удавалось обеспечить калибровочную инвариантность плотности заряда ρ, которая, согласно /8,9/, определена соотношением

---

* Институт физических исследований АН Арм. ССР, г. Аштарак.

** НИИ физики конденсированных сред при Ереванском госуниверситете.

$$\rho_\omega(\mathbf{k}) = -N(0)\left[2\varphi_\omega(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi i}\int\frac{dO_p}{4\pi}\,\hat{g}_{\epsilon\,\epsilon-\omega}(p,k)\right], \tag{5}$$

где $N(0) = mp_F/2\pi^2$ — плотность уровней на поверхности Ферми. В работе Ху /5/, посвященной обзору возникающих затруднений, отмечалось, что использованные в /2–6/ законы калибровочных преобразований для функций $f_1(\epsilon)$ и $f_2(\epsilon)$ справедливы лишь в пределе больших $\epsilon \gg |\Delta|$, где $|\Delta|$ — щель в энергетическом спектре (модуль параметра порядка). Проблема нахождения законов калибровочных преобразований для f_1 и f_2 при произвольных ϵ оставалась нерешенной, в связи с чем в теории присутствовали определенные трудности. Во-первых, выбором калибровки можно было получить сколь угодно большие значения для изменения плотности заряда в сверхпроводнике (присутствовали "фиктивные" поля). Во-вторых, даже в отсутствие фиктивных полей решение динамических уравнений Гинзбурга — Ландау приводило к расходящимся значениям для калибровочно-инвариантного потенциала $\mu = -\varphi + \dot{\theta}/2$ в точках $|\Delta| = 0$ /7/. (Здесь φ — скалярный потенциал, θ — фаза параметра порядка, определенная соотношением $\Delta = |\Delta|e^{-i\theta}$, $e = \hbar = c = 1$.) Согласно /3/ (см. также далее формулу (18)), это соответствует расходящимся значениям плотности заряда ρ.

В данной работе мы установили точные законы калибровочных преобразований для функций f_1 и f_2, что позволило устранить отмеченные выше трудности.

Исходным является закон преобразования

$$\psi_\sigma(\mathbf{r},t) \to \exp[i\chi(\mathbf{r},t)/2]\psi_\sigma(\mathbf{r},t) \tag{6}$$

для полевого оператора $\psi_\sigma(\mathbf{r},t)$ при преобразовании скалярного потенциала $\varphi \to \varphi - \dot{\chi}/2$ (где χ — произвольная функция). Из (6) следует, что пропагатор $\hat{g}$ (так же, как и запаздывающая и опережающая функции $\hat{g}^R$ и $\hat{g}^A$) преобразуется как (см., напр., /6/)

$$\hat{g} \to \exp(i\hat{\tau}_3\chi/2) * \hat{g} * \exp(-i\hat{\tau}_3\chi/2). \tag{7}$$

В квазиклассическом пределе выражение (4) было представлено Ларкиным и Овчинниковым /8/ в форме, где учитывались лишь конволюционные поправки низшего порядка. Нам потребуется следующий порядок приближения, согласно которому

$$A*B = AB + (1/2)\,i\left[A_{,\epsilon}\dot{B} - \dot{A}B_{,\epsilon}\right] - (1/8)\left[A_{,\epsilon\epsilon}\ddot{B} - 2\dot{A}_{,\epsilon}\dot{B}_{,\epsilon} + \ddot{A}B_{,\epsilon\epsilon}\right]. \tag{8}$$

В (8) приняты обозначения: $A_{,\epsilon} \equiv \partial A/\partial\epsilon$, $\dot{A} \equiv \partial A/\partial t$, причем $t = (t_1 + t_2)/2$, а частота ϵ соответствует фурье-преобразованию по разностному аргументу $t_1 - t_2$.

Для диагональных компонент $\hat{g}$, которые только и существенны в (5), нетрудно, с одной стороны, установить из (7) и (8) закон преобразования

$$\hat{g}^{\mathrm{diag}} \to \hat{g}^{\mathrm{diag}} + (1/2)\dot{\chi}\,\hat{\tau}_3\hat{g}^{\mathrm{diag}}_{,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2\hat{g}^{\mathrm{diag}}_{,\epsilon\epsilon}, \tag{9}$$

причем здесь и далее будут опускаться члены, пропорциональные $\ddot{\chi}$, поскольку предполагается квазиклассическая зависимость потенциала φ от времени. С другой стороны, можно совершить калибровочное преобразование над $\hat{g}$-функцией, определенной формулой (3). Учитывая, что величины $\hat{g}^R$ и $\hat{g}^A$ преобразуются аналогично (9), потребуем совпадения окончательного результата с формулой (9). В результате находим законы преобразований для функций f_1 и f_2:

$$f_{1(2)} \to f_{1(2)} + \frac{1}{2}\left\{ \frac{(1/2)\dot{\chi}(f_1+f_2)_{,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2[(f_1+f_2)_{,\epsilon\epsilon} + 2(N_{1,\epsilon}/N_1)(f_1+f_2)_{,\epsilon}]}{1+(1/2)\dot{\chi}(N_{1,\epsilon}/N_1) + (1/8)\dot{\chi}^2 N_{1,\epsilon\epsilon}/N_1} \overset{+}{(-)} \right.$$

$$\left. \overset{+}{(-)} \frac{-(1/2)\dot{\chi}(f_1-f_2)_{,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2[(f_1-f_2)_{,\epsilon\epsilon} + 2(\bar{N}_{1,\epsilon}/\bar{N}_1)(f_1-f_2)_{,\epsilon}]}{1-(1/2)\dot{\chi}(\bar{N}_{1,\epsilon}/\bar{N}_1) + (1/8)\dot{\chi}^2\bar{N}_{1,\epsilon\epsilon}/N_1} \right\}. \tag{10}$$

В (10) фигурируют функции N_1 и $\bar{N}_1$, которые определены соотношениями

$$N_1 = (g^R - g^A)/2\pi i, \quad \bar{N}_1 = (\bar{g}^R - \bar{g}^A)/2\pi i. \tag{11}$$

При $\varphi \to \varphi - \dot{\chi}/2$ имеем, в соответствии с (7), (3) и (11):

$$N_1 \to N_1 + (1/2)\dot{\chi}N_{1,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2 N_{1,\epsilon\epsilon}, \quad \bar{N}_1 \to \bar{N}_1 - (1/2)\dot{\chi}\bar{N}_{1,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2\bar{N}_{1,\epsilon\epsilon}. \tag{12}$$

Отметим, что согласно (10) и (12), функции $f_1(\epsilon)$ и $f_2(\epsilon)$ (так же, как и N_1 и $\bar{N}_1$) являются функциями общего вида (они имеют определенную четность лишь в отсутствие внешних полей). На основе (5), (9), (10) и (12) можно видеть, что плотность заряда в приближении /2–6/ должна иметь форму

$$\rho = -2N(0)\left\{\varphi + (1/4)\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon\,[N_1(f_1+f_2) + \bar{N}_1(f_1-f_2)]\right\}, \tag{13}$$

которая строго калибровочно-инвариантна (заметим, что в /2–6/ для ρ приведено некорректное выражение, которое следует из (13) при $N_1 = -\bar{N}_1$, что не выполняется при $\varphi \neq 0$ (см. (12)).

Обратимся теперь к дополнительному вкладу, который должен быть внесен в динамическое уравнение (1) на основе полученных соотношений. В этой связи отметим, что неравновесные функции $f_1(\epsilon)$ и $f_2(\epsilon)$ определялись в /2–6/ без учета членов, квадратичных по $\dot{\chi}$, а также и слагаемых, пропорциональных $N_{1,\epsilon}$. Функция $N_{1,\epsilon}$ отлична от нуля лишь при $\epsilon \sim |\Delta|$ и по этой причине обусловленные $N_{1,\epsilon}$ члены дают несущественный вклад в (1), поскольку в подынтегральном выражении (2) играют роль лишь значения $\epsilon \sim T$ (напомним, что $T \sim T_c \gg |\Delta|$). По этой причине при анализе возникающих модификаций уравнения Гинзбурга – Ландау можно пренебречь членами, пропорциональными $N_{1,\epsilon}/N_1$ в соотношении (10), которое представляется тогда в виде

$$f_1 \to f_1 + (1/2)\dot{\chi} f_{2,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2 f_{1,\epsilon\epsilon}, \quad f_2 \to f_2 + (1/2)\dot{\chi} f_{1,\epsilon} + (1/8)\dot{\chi}^2 f_{2,\epsilon\epsilon}. \tag{14}$$

В отсутствие потенциала φ из кинетических уравнений для f_1 и f_2 в приближениях /2–6/ следует

$$f_1 = f_1^0 - f_{1,\epsilon}^0 \frac{R_2}{N_1}\tau_\epsilon \frac{\partial|\Delta|}{\partial t}, \quad f_2 = -\frac{N_2\tau_\epsilon|\Delta|}{N_1 + N_2 2\tau_\epsilon|\Delta|}\dot{\theta} f_{1,\epsilon}^0, \tag{15}$$

где $N_2 = -\operatorname{Im}(|\Delta|/\sqrt{(\epsilon + i\gamma)^2 - |\Delta|^2})$, $R_2 = \operatorname{Re}(|\Delta|/\sqrt{(\epsilon + i\gamma)^2 - |\Delta|^2})$. Потенциал φ может быть восстановлен в (15) на основе (14), где надо положить $\dot{\chi}/2 = -\varphi$. Опуская в получаемом выражении для f_1 слагаемое, пропорциональное $\dot{\theta}\varphi$ (его вклад в (2) мал), находим

$$f_1 = f_1^0 - f_{1,\epsilon}^0 \frac{R_2}{N_1} \tau_\epsilon \frac{\partial|\Delta|}{\partial t} + \frac{\varphi^2}{2} f_{1,\epsilon\epsilon}^0 \tag{16}$$

(соответствующей поправкой к функции f_2 можно пренебречь, так как она пропорциональна $f_{1,\epsilon\epsilon\epsilon}$). Наличие последнего слагаемого в (16) приводит к дополнительному члену в динамическом уравнении для параметра порядка (ср. /1–7/), которое теперь принимает вид

$$-\frac{\pi}{8T_c\sqrt{1 + (2\tau_\epsilon|\Delta|)^2}} \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2i\varphi + 2\tau_\epsilon^2 \frac{\partial|\Delta|^2}{\partial t}\right] \Delta + \frac{\pi}{8T_c} [D(\vec{\nabla} - 2iA)^2]\Delta +$$

$$+ \left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{7\zeta(3)(|\Delta|^2 + 2\mu^2)}{8(\pi T_c)^2}\right] \Delta = 0. \tag{17}$$

Отметим, что в статическом случае дополнительный член $\sim \mu^2$ получался ранее из других соображений* в работе Галайко /10/. Его наличие в (17) принципиально важно, поскольку приводит к устранению бесконечно больших значений μ: сверхпроводимость теперь разрушается при $\mu \sim |\Delta|$.

Как следует из (5) и (15) (ср. /3/), плотность заряда

$$\rho = N(0) \frac{\pi|\Delta|}{T} \frac{\tau_\epsilon|\Delta|}{\sqrt{1 + (2\tau_\epsilon|\Delta|)^2}} \mu. \tag{18}$$

Соотнося значение ρ (18) с плотностью электронов в нормальном состоянии $\rho_n = 4N(0)\epsilon_F/3$, находим

$$\frac{\rho}{\rho_n} \lesssim \frac{|\Delta|^2}{\epsilon_F T_c} \frac{\tau_\epsilon|\Delta|}{\sqrt{1 + (2\tau_\epsilon|\Delta|)^2}}, \tag{19}$$

что приводит к ограничению на величины зарядов и полей, возникающих в сверхпроводнике.

Таким образом, динамическая схема, основанная на уравнении (17), логически непротиворечива и может быть использована для рассмотрения конкретных задач.

Мы благодарны Г.М. Элиашбергу за полезное обсуждение затронутых вопросов.

---

* Мы представили дополнительное слагаемое в форме, обеспечивающей калибровочную инвариантность (17), т.е. заменили φ^2 на μ^2. Эта процедура в данном случае необходима, так как при анализе (1) не удерживались высшие производные по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langenberg D. N., Larkin A. I. (Eds.) Nonequilibrium superconductivity, North–Holland, Amsterdam, 1986.
2. Голуб А. А. ЖЭТФ, 71, 341 (1976).
3. Kramer L., Watts–Tobin R. J. Phys. Rev. Lett., 40, 1041 (1978).
4. Schön G., Ambegaskar V. Phys. Rev., B 19, 3515 (1979).
5. Hu C.–R. Phys. Rev., B 31, 2775 (1980).
6. Watts–Tobin R. J., Krähenbühl Y., Kramer L. J. Low Temp. Phys., 42, 459 (1981).
7. Ивлев Б. И., Копнин Н. Б. УФН, 142, 435 (1984).
8. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. ЖЭТФ, 73, 299 (1977).
9. Элиашберг Г. М. ЖЭТФ, 61, 1254 (1971).
10. Галайко В. П. ЖЭТФ, 68, 223 (1975).

Поступила в редакцию 25 июня 1986 г.