

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО НАБЛЮДАЕМЫХ ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Л.Ш. Илькова, Ю.А. Кравцов, А.С. Пиковский

*На основе экспериментальных данных, полученных на макете стохастического автогенератора, найдена степень детерминированности системы (коэффициент корреляции измеренных и предсказываемых значений генерируемых колебаний) и показано, что ограниченная предсказуемость связана в основном с внутренними шумами генератора.*

Сочетание детерминированных и случайных свойств в динамических системах с хаотическим поведением заставляет искать новые способы описания таких систем. Так как система, описываемая детерминированными уравнениями, через конечное время может стать полностью непредсказуемой, обнаруживая хаотическое поведение, естественно поставить вопросы о вычислении времени предсказуемого поведения таких систем и об определении расхождения между наблюдаемой величиной и ее расчетным (модельным) значением через время  $\tau$  после начала отсчета  $t^0$ .

Для ответа на эти вопросы целесообразно ввести меру предсказуемости. Количественная мера предсказуемости — степень детерминированности процесса  $y(t)$  по отношению к модельному процессу  $z(t)$  — предложена в работе /1/ как коэффициент корреляции между модельным процессом  $z(t)$  и наблюдаемым процессом  $y(t)$ :

$$D(\tau) = \langle \tilde{y}(t^0 + \tau) \tilde{z}(t^0 + \tau) \rangle / \sigma_y \sigma_z, \quad (1)$$

где  $\sigma_y, \sigma_z$  — среднеквадратичные отклонения величин  $y$  и  $z$  от их средних значений, а  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}$  — переменные части процессов  $y$  и  $z$ , например,  $\tilde{y} = y - \langle y \rangle$ . Принимается, что в начальный момент времени модельный процесс  $z(t^0)$  совпадает с наблюдаемым:  $z(t^0) = y(t^0)$ . Наблюдаемый процесс  $y(t)$  отличается от реального процесса  $x(t)$  наличием случайного слагаемого  $\nu(t)$ , которое описывает "измерительный" шум:

$$y(t) = x(t) + \nu(t), \quad (2)$$

тогда как расхождение между  $x(t)$  и  $z(t)$  обязано присутствию шумовых процессов в самой исследуемой системе. Равенство степени детерминированности единице ( $D = 1$ ) говорит о том, что на соответствующих интервалах времени наблюдаемый  $y(t)$  и модельный  $z(t)$  процессы совпадают и система полностью предсказуема (детерминированна), тогда как при  $D \rightarrow 0$  поведение системы полностью непредсказуемо. Переход от полной детерминированности системы ( $D = 1$ ) к абсолютной непредсказуемости ( $D = 0$ ) подразумевает существование промежуточного частично детерминированного состояния, при котором  $0 < D < 1$ . Введенное в /1/ время детерминированного (предсказуемого) поведения  $\tau_d$ , которое в предшествующих работах /2–4/ выступало как время динамической памяти, определяется как время, в течение которого степень детерминированности не опускается ниже уровня  $1/2$ :  $D(\tau) \geq 1/2$ . При временах, больших  $\tau_d$ , можно говорить о случайности (в смысле непредсказуемости) наблюдаемого процесса  $y(t)$ .

В данной работе поведение степени детерминированности  $D$  исследовалось экспериментально на макете стохастического автогенератора, предложенного в /5/ (параметры генератора примерно такие же, как в /5/). При определении степени детерминированности экспериментально наблюдаемых режимов даже саму модель необходимо строить, основываясь на экспериментальных данных. В данной работе использовался традиционный подход, при котором модель строилась на основе метода наименьших квадратов.

Проведенный численно-лабораторный эксперимент состоял в том, что возникающие в генераторе колебания подвергались следующей цифровой обработке:

а) определялись последовательные максимумы  $y_1, y_2, y_3, \dots$  процесса  $y(t)$  (рис. 1); при этом вместо непрерывного времени  $t = t^0 + \tau$  было использовано дискретное время  $n = m + \mu$ , где  $m$  – аналог начального момента  $t^0$ , а  $\mu$  – аналог  $\tau$ ;

б) строилось точечное отображение:  $y_{n+1} = f(y_n)$ ;

в) в этом отображении выделялись два гладких участка, которые аппроксимировались полиномами третьей степени по методу наименьших квадратов (повышение степени практически не улучшало аппроксимацию).

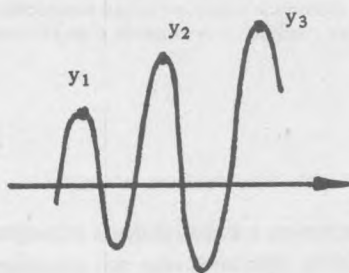


Рис. 1. Типичный вид наблюдаемого процесса  $y(t)$ , генерируемого стохастическим генератором /5/;  $y_1, y_2, y_3, \dots$  – последовательные максимумы генерируемого процесса.

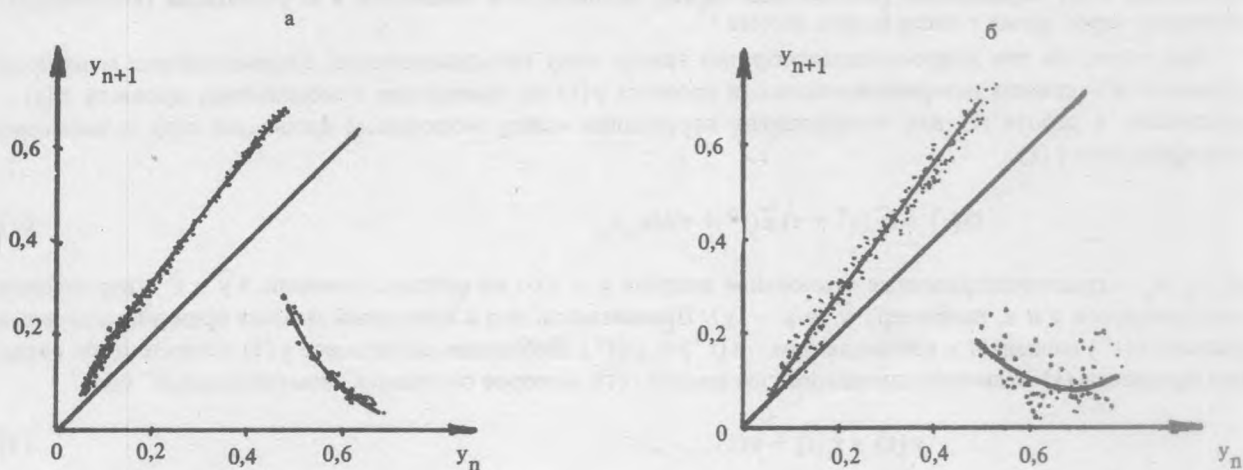


Рис. 2 а) Экспериментальное отображение (отмечено точками)  $y_{n+1} = f(y_n)$  для стохастического генератора /5/; сплошная линия – идеализированное (модельное) отображение  $z_{n+1} = f_M(z_n)$ . б) То же, что на рис. а, но при наличии дополнительного внешнего шума.

Вид экспериментальных отображений представлен на рис. 2. В условиях, когда на стохастический автогенератор подавался дополнительный внешний шум, разброс экспериментальных точек был больше (рис. 2б), чем без внешнего шума (рис. 2а). Аппроксимация этих отображений полиномами третьей степени (сплошные линии) служила основой динамической модели  $z_{n+1} = f_M(z_n)$ , при этом оказалось, что на коэффициенты полиномов внешний шум влияет слабо. По динамической модели и по экспериментальным данным была вычислена степень детерминированности  $D(\mu) = \langle y_{n+\mu} z_{n+\mu} \rangle / \sigma_y \sigma_z$  (рис. 3), где  $\mu$  – дискретный аналог временного интервала  $\tau$ . Согласно рис. 3, в отсутствие добавочных шумов время детерминированного поведения  $\mu_d$  составило примерно 10 единиц, тогда как в системе с дополнительными шумами время предсказуемого поведения  $\mu_d$  уменьшилось примерно вдвое:  $\mu_d \cong 5$ .

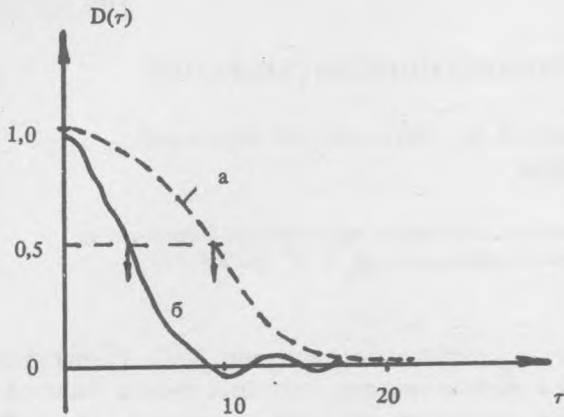


Рис. 3. Степень детерминированности  $D(\mu)$  в отсутствие шума (а) и при наличии дополнительного шума (б).

Наряду со степенью детерминированности  $D(\mu)$  вычислялась также функция ошибок  $R(\mu)$ , определенная как средний квадрат разности между наблюдаемыми значениями  $y_{n+\mu}$  и модельными значениями  $z_{n+\mu}$ :  $R(\mu) = \langle (y_{n+\mu} - z_{n+\mu})^2 \rangle$ . Связь между функцией ошибок и степенью детерминированности дается выражением:

$$D(\mu) = 1 - R(\mu)/2\sigma_y\sigma_z.$$

Оказалось, что при достаточно малых  $\mu$  ( $1 < \mu \leq 5$ ) функция ошибок  $R(\mu)$  растет экспоненциально, что соответствует экспоненциальной неустойчивости движений при хаосе.

Проведенные эксперименты позволили получить ряд характеристик исследуемой стохастической системы, в том числе:

- а) наибольший ляпуновский показатель экспоненциального роста (из анализа зависимости  $R(\mu)$ );
- б) уровень внутреннего шума в стохастическом генераторе (из данных о времени детерминированного поведения);
- в) минимальный уровень внутреннего шума, начиная с которого непредсказуемость определяется не точностью модельной зависимости  $f_M(z)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Илькова Л. Ш. и др. Известия ВУЗов, Радиофизика, 28, № 7, 929 (1985).
2. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. Известия ВУЗов, Радиофизика, 24, № 8, 992 (1981).
3. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. Труды международной рабочей группы по турбулентным и нелинейным процессам. Киев, 1983, с. 129.
4. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. Радиотехника и электроника, 29, № 12, 2358 (1984).
5. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. Радиотехника и электроника, 25, № 2, 336 (1980).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 12-июня 1986 г.