Краткие сообщения по физике № 11-1986 г.

УДК 530.145

О РЕДЖЕВСКОЙ АСИМПТОТИКЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ УГЛЫ

С.А. Гаджиев, Р.К. Джафаров

Исследована асимптотика решения уравнения Бете – Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния скалярных частиц на произвольные углы в реджевской области.

В работах /1, 2/ для обоснования реджевского поведения амплитуды при высокой энергии использовалось лестничное приближение в уравнении типа Бете – Солпитера (БС) для амплитуды рассеяния. В работах /3-6/ найдена амплитуда рассеяния вперед в лестничном приближении и исследовано асимптотическое поведение амплитуды как в реджевской области, так и в бъеркеновской области. Показано, что амплитуда имеет степенную зависимость от полной энергии.

В настоящей работе исследуется асимптотика решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния скалярных частиц на произвольные углы в реджевской области.

Уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния скалярных частиц с массой m в лестничном приближении с трилинейным взаимодействием имеет вид:

$$F(s, t;\ p^2, k^2) = \pi\lambda^2\delta_+(s-\mu^2) + \frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{F(s', t; (p-q)^2; (k-q)^2)\,\Theta(q_0)\,\delta_+(q^2-\mu^2)\,d^4q}{[m^2-(p-q)^2][m^2-(k-q)^2]}. \qquad (1)$$

Здесь p, p' и k, k' — соответственно начальные и конечные четырехимпульсы, $s = (p + p')^2$, $t = (p - k)^2$, $s' = (p+p'-q)^2$, $p^2 = k^2 = m^2$, μ – масса обменной частицы.

При $s \gg \mu^2, m^2$ поправки к амплитуде F за счет выхода за массовую поверхность $\sim (p^2 - m^2)/s$. Пренебрегая в F зависимостью от p^2, k^2, имеем:

$$F(s, t) = \pi\lambda^2\delta_+(s-\mu^2) + \frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{F(s', t)\,\Theta(q_0)\,\delta_+(q^2-\mu^2)\,d^4q}{[m^2-(p-q)^2][m^2-(k-q)^2]}. \qquad (2)$$

Используя равенство $1 = \int \delta((p+p'-q)^2 - s')\,ds'$, перепишем (2) в виде:

$$F(s, t) = \pi\lambda^2\delta_+(s-\mu^2) + \frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{F(s', t)\,\Theta(p_0+p_0'-q_0)\,\delta_+((p+p'-q)^2-s')\,\Theta(q_0)\,\delta_+(q^2-\mu^2)\,d^4q\,ds'}{[m^2-(p-q)^2][m^2-(k-q)^2]} \qquad (3)$$

Вычислим ядро этого уравнения

$$K(s, t) = \frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{\Theta(p_0+p_0'-q_0)\,\delta_+((p+p'-q)^2-s')\,\Theta(q_0)\,\delta_+(q^2-\mu^2)\ |\mathbf{q}|^2\,d|\mathbf{q}|\,dq_0\,d\varphi\,d(\cos\theta)}{[m^2-(p-q)^2][m^2-(k-q)^2]} \qquad (4)$$

в системе центра инерции налетающих частиц $(p + p' = 0)$. Проводя интегрирование в (4) по q_0, $|\mathbf{q}|$ и φ, получим:

$$K(s,t) = \frac{\pi^2\lambda^2[(s-s'+\mu^2)^2/4s-\mu^2]^{-1/2}}{8(2\pi)^4\sqrt{s}\,|p|^2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(\beta+z)(z^2+2\beta z_0 z+\beta^2+z_0^2-1)^{1/2}}, \tag{5}$$

где $z_0 = \cos\ \theta_0$ – косинус угла рассеяния, $z = \cos\theta$, $\beta \doteq (\mu^2 - s + s')/4|p|\ [(s - s' + \mu^2)^2/4s - \mu^2]^{1/2}$.

Рассмотрим случай рассеяния при малых передаваемых импульсах $(t \ll s)$. Производя замену $z_0 = 1 + \epsilon$, перепишем (5) в виде:

$$K(s,t) = \frac{\pi^2\lambda^2[(s-s'+\mu^2)^2/4s-\mu^2]^{-1/2}}{8(2\pi)^4 s^{1/2}|p|^2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(z+\beta)^2[1+2\epsilon(\beta z+1)/(z+\beta)^2]^{1/2}} \tag{6}$$

Разлагая ядро (6) по степеням ϵ при условии $|\epsilon| \ll 1$ и удерживая первые два члена разложения, находим:

$$K(s,t) = \frac{\pi^2\lambda^2[(s-s'+\mu^2)^2/4s-\mu^2]^{-1/2}}{8(2\pi)^4 s^{1/2}|p|^2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(z+\beta)^2}\,[1-\epsilon(\beta z+1)/(\beta+z)^2].$$

Вычисляя последний интеграл и подставляя в (3), получим:

$$F(s,t) = \pi\lambda^2\delta_+(s-\mu^2) + \frac{\pi^2\lambda^2(1+t/6m^2)}{2(2\pi)^4 m^2}\int\frac{F(s',t)(1-s'/s)\,d(s'/s)}{(1-s'/s)^2+\mu^2/m^2}, \tag{7}$$

причем из кинематического условия $|\cos\theta| \leqslant 1$ имеем: $\mu^2 \leqslant s' \leqslant (s^{1/2}-\mu)^2$.

Полагая $F(s,t) = s^{\alpha(t)}$ и вводя безразмерную переменную $x = s'/s$, получим $(s \gg \mu^2)$:

$$1 = \frac{\pi^2\lambda^2(1+t/6m^2)}{2(2\pi)^4 m^2}\int_0^1\frac{(1-x)x^{\alpha}dx}{(1-x)^2+\mu^2/m^2}. \tag{8}$$

Интеграл (8) можно привести к сумме двух гипергеометрических функций:

$$64\pi^2\mu^2\ \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^2(1+t/6m^2)} = F(1,2;\ \alpha+3;\ \frac{-im}{\mu}) + F(1,2;\ \alpha+3;\ \frac{im}{\mu}). \tag{9}$$

Из анализа выражения (9) следует, что $\alpha \neq -1, -2, ..., -n$, в противном случае выражение (9) становится бессмысленным.

Явный вид α удается определить, рассмотрев два предельных случая. При $m \ll \mu$ в знаменателе (8) можно пренебречь слагаемым $(1-x)^2$ и выполнить интегрирование. Тогда:

$$\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\ [1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2\mu^2}(1+\frac{t}{6m^2})]^{1/2}. \tag{10}$$

Этот же результат можно получить из (9).

В случае $m \gg \mu$, воспользовавшись аналитическим продолжением гипергеометрических функций (9) и удерживая ведущие члены по μ^2/m^2, для a получим трансцендентное уравнение

$$\psi(a+1) = -\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2(1+t/6m^2)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}. \qquad (11)$$

Используя свойство логарифмической производной Г-функции $\psi(a+1)$, получим

$$1 = \frac{\lambda^2(1+t/6m^2)}{32\pi^2 m^2}\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n(a+n)}\right). \qquad (12)$$

При конечных значениях константы связи и обменной массы (при $\mu \ll m$) имеем:

$$a \approx -n \pm \left(-\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2(1+t/6m^2)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right),\ n = 1, 2, \ldots; \qquad (13)$$

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2(1+t/6m^2)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right| \ll 1. \qquad (14)$$

Отметим, что формулы (10) – (14) при $t \to 0$ (рассеяние вперед) совпадают с результатами работы /6/; условие (14) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруасара.

В случае рассеяния на произвольные углы, вычисляя интеграл (6) в кинематической области $s \gg \mu^2$, m^2, для ядра получим следующее выражение:

$$K(s,t) = \rho(t)\,[\mu^2 + (1-s'/s)^2(2m^2 + |\mathbf{p}|^2(1-z_0))]^{-1/2}\, s^{-1}, \qquad (15)$$

где $$\rho(t) = \frac{\pi^2\lambda^2}{4(2\pi)^4|\mathbf{p}|(1-z_0)^{1/2}}\ln\frac{2m^2 - t - (t^2-4m^2t)^{1/2}}{2m^2 - t + (t^2-4m^2t)^{1/2}}.$$

Подставляя (15) в (3) получим:

$$F(s,t) = \pi\lambda^2\delta_+(s-\mu^2) + \rho(t)\int\frac{F(s',t)\,d(s'/s)}{[\mu^2 + (1-s'/s)^2(2m^2+|\mathbf{p}|^2(1-z_0))]^{1/2}}.$$

Как и в предыдущем случае, имеем:

$$1 = \rho(t)\,(2m^2 + |\mathbf{p}|^2(1-z_0))^{-1/2}\int_0^1\frac{x^a dx}{(\nu^2 + (1-x)^2)^{1/2}}, \qquad (16)$$

где $\nu^2 = \mu^2/(2m^2 + |\mathbf{p}|^2(1-z_0)) = \mu^2/(2m^2 - t/2)$.

Интеграл (16) может быть представлен в виде гипергеометрической функции двух переменных /7/:

$$1 = \frac{\rho(t)}{(a+1)\,[2m^2 + |\mathbf{p}|^2(1-z_0)]^{1/2}}\,F_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a+2; \frac{i}{\nu}, -\frac{i}{\nu}\right).$$

В случае больших обменных масс ($\mu^2 \gg 2m^2 - t/2$) в знаменателе выражения (16) можно пренебречь слагаемым $(1 - x)^2$. Выполняя интегрирование, для a получаем следующее выражение:

$$a = \frac{\pi^2 \lambda^2}{2\sqrt{2}(2\pi)^4 \mu(-t)^{1/2}} \ln \frac{2m^2 - t - (t^2 - 4m^2 t)^{1/2}}{2m^2 - t + (t^2 - 4m^2 t)^{1/2}},$$

из которого следует, что при сильной связи $a \to +\infty$.

Для нахождения явного вида показателя a в случае произвольных значений массы обменной частицы произведем в (16) замену $1 - x = y$. Ограничиваясь только первыми двумя членами разложения в ряд по a, после интегрирования по y находим:

$$a = \frac{(2m^2 - t/2)^{1/2}}{\mu - (\mu^2 + 2m^2 - t/2)^{1/2}} \left\{ \ln \left| \frac{\mu}{(2m^2 - t/2)^{1/2} + (\mu^2 + 2m^2 - t/2)^{1/2}} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{2}(2\pi)^4 (-t)^{1/2} (2m^2 - t/2)^{1/2}}{\pi^2 \lambda^2} \left[\ln \frac{2m^2 - t - (t^2 - 4m^2 t)^{1/2}}{2m^2 - t + (t^2 - 4m^2 t)^{1/2}} \right]^{-1} \right\}. \tag{17}$$

Из выражения (17) видно, что наличие инфракрасной особенности нарушает реджевскую асимптотику (при $\mu \to 0$, $a \to +\infty$). Таким образом, полученные результаты позволяют утверждать, что обменная масса оказывает существенное влияние на поведение амплитуды при высоких энергиях, и только последовательный учет инфракрасных особенностей ($\mu \ll m$) может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amati D., Stanghellini A., Fubini S. Nuovo Cimento, **25**, 4726 (1967).
2. Rozner J.L. J. Math. Phys., 7, 875 (1966).
3. Арбузов Б.А., Рочев В.Е. ЯФ, **21**, в. 4, (1975).
4. Клименко К.Г., Рочев В.Е. ТМФ, **30**, № 2, 191 (1977).
5. Дьяконов В.Ю. ТМФ, **43**, № 2, 218 (1980).
6. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Доклады АН Азерб. ССР, **43**, № 1 (1986).
7. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1973.

Поступила в редакцию 25 июня 1986 г.