Краткие сообщения по физике № 7-1986 г.

УДК 535.42+517.946

РЕШЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ В ОПТИКЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФРЕНЕЛЯ

Е.Г. Абрамочкин, В.Г Волостников, В.В. Котляр, А.Н. Малов

Показана возможность и предложен способ однозначного восстановления комплексной амплитуды света вблизи рассеивающего объекта по измерениям интенсивности в зоне Френеля и ее производной вдоль направления распространения излучения.

Фаза светового поля, рассеянного объектом, недоступна для непосредственного измерения квадратичными детекторами, а ее определение голографическими либо интерферометрическими способами не всегда возможно на практике. В то же время, только знание пространственного распределения фазы рассеянного поля позволяет получить наиболее полную информацию об объекте. В связи с этим актуальным является решение фазовой проблемы в оптике: восстановление комплексной амплитуды светового поля вблизи рассеивающего объекта по измерениям интенсивности /1/.

В соответствии с приближением Фраунгофера связь между интенсивностью в дальней зоне $I(x)$ и амплитудой светового поля вблизи объекта $f(\xi)$ определяется выражением:

$$I(x) = F(x)F^*(x) = \left| \int_{-a}^{a} f(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi \right|^2, \tag{1}$$

где $F(x)$ – комплексная амплитуда в зоне Фраунгофера; $2a$ – размер предметного поля. Решение уравнения (1) можно получить, используя аналитическое продолжение $I(z) = F(z)F^*(z^*)$, которое строят на основе измерения $I(x)$. Из уравнения (1) следует, что $F(z)$ является целой аналитической функцией и поэтому полностью определяется положением своих нулей в комплексной плоскости (рис. 1а) /2/. Таким образом, для восстановления функции $F(z)$ необходимо определить, какие из нулей функции $I(z)$ (рис. 1б) являются нулями функции $F(z)$ (рис. 1а). Если информация об этом отсутствует, то функция $F(z)$ определяется неоднозначно (в случае рис. 1 имеется 2^3 возможных вариантов).

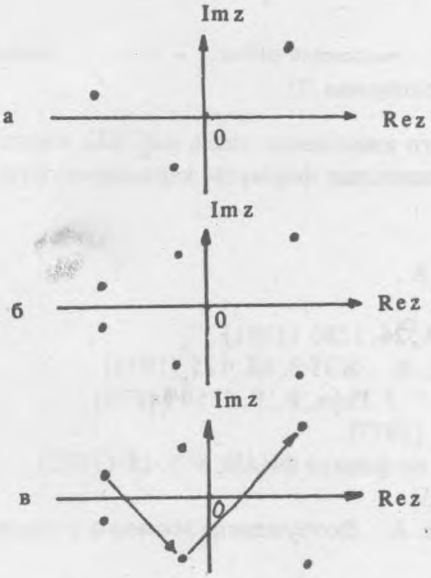

Рис. 1. а – нули амплитуды $F(z, l)$; б – нули интенсивности $I(z, l)$; в – пути, по которым выполняется равенство (5).

Для получения однозначного решения необходимо проводить дополнительные измерения. Измерений интенсивности на двух близких плоскостях в зоне Френеля $I_1(x,l)$ и $I_2(x,l+\Delta l)$ (где l – координата вдоль направления распространения светового поля, Δl – мало) достаточно для однозначного восстановления $f(\xi)$, если функция $f(\xi)$ дифференцируема /3/. Если функция $f(\xi)$ имеет N производных, то I_1 и I_2 можно измерять при произвольном расстоянии Δl между плоскостями в зоне Френеля /4/.

Анализ фазовой проблемы, проведенный в /5, 6/, показал невозможность получения точного решения без привлечения существенной априорной информации. В данной работе показано, что по измерению $I(x,l)$ и $\partial I(x,l)/\partial l$ в зоне Френеля можно однозначно определить предметную функцию $f(\xi)$, если она принадлежит классу кусочно-непрерывных на интервале функций, и получен алгоритм ее восстановления.

В области Френеля $f(\xi)$ и $I(x,l)$ связаны соотношением

$$I(x,l) = F(x,l)F^*(x,l) = \frac{k}{2\pi l} \left| \int_{-a}^{a} f(\xi) \exp\left[\frac{ik(x-\xi)^2}{2l} \right] d\xi \right|^2, \tag{2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны излучения.

Амплитуда $F(x,l)$ в (2) удовлетворяет параболическому уравнению

$$2ik \frac{\partial F(x,l)}{\partial l} + \frac{\partial^2 F(x,l)}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Осуществляя аналитическое продолжение $F(z,l)$ и вводя дифференциальный оператор $L = 2ik\partial/\partial l + \partial^2/\partial z^2$, можно показать, что

$$LI(z,l) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[F(z,l) \frac{\partial F^*(z^*,l)}{\partial z} \right]. \tag{4}$$

Тогда интеграл от $LI(z,l)$ не зависит от пути интегрирования между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости.

Если z_1 и z_2 – нули амплитуды $F(z,l)$, то интеграл обращается в нуль:

$$\int_{z_1}^{z_2} LI(z,l)\, dz = 0. \tag{5}$$

На рис.1в стрелками соединены нули, между которыми выполняется соотношение (5). Если z_1 и z_2 – нули $I(z,l)$, но не нули $F(z,l)$, то соотношение (5) не выполняется.

Из формулы (4) следует:

$$2ik \int_{z_0}^{z} \frac{\partial I(z,l)}{\partial l} dz - \frac{\partial I(z_0,l)}{\partial z} = F(z,l) \frac{\partial F^*(z^*,l)}{\partial z} - F^*(z^*,l) \frac{\partial F(z,l)}{\partial z}, \tag{6}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ – нуль амплитуды. Сужая уравнение (6) на вещественную ось и полагая $F(x,l) = \sqrt{I(x,l)} \exp[i\varphi(x,l)]$, получим

$$2ik \int_{z_0}^{x_0} \frac{\partial I(z,l)}{\partial l} dz - \frac{\partial I(z_0,l)}{\partial z} + 2ik \int_{x_0}^{x} \frac{\partial I(x,l)}{\partial l} dx = -2iI(x,l) \frac{\partial \varphi(x,l)}{\partial x}. \tag{7}$$

Если $I(z,l)$ не имеет вещественных нулей, то из (7), интегрируя по x, получим выражение для фазы

$$\varphi(x) = \varphi(a) - k \int_{a}^{x} dx' I^{-1}(x',l) \int_{x_0}^{x'} d\xi \frac{\partial I(\xi,l)}{\partial l} + c_1 \int_{a}^{x} \frac{dx'}{I(x',l)} \tag{8}$$

с точностью до аддитивной постоянной $\varphi(a)$, где a – любая вещественная точка и

$$c_1 = k \int_{z_0}^{x_0} \frac{\partial I(z,l)}{\partial l} dz - \frac{1}{2i} \frac{\partial I(z_0,l)}{\partial z}.$$

Используя уравнение (3) и соотношение (4), можно показать, что константа c_1 вещественна и для ее определения достаточно построить аналитическое продолжение $I(z,l)$ и $\partial I(z,l)/\partial l$ вдоль прямой $\mathrm{Re}\, z = x_0$ на отрезке $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |\mathrm{Im}\, z_0|$. Если $I(x,l)$ имеет вещественный нуль $z_0 = x_0$, то

$$\varphi(x) = \varphi(a) - k \int_a^x dx' I^{-1}(x',l) \int_{x_0}^{x'} d\xi \frac{\partial I(\xi,l)}{\partial l} + \pi c_2, \tag{9}$$

где a – вещественная точка, в которой $I(a,l) \neq 0$, неопределенность подынтегральной функции в выражении (9) раскрывается по правилу Лопиталя и c_2 – число вещественных нулей $I(x,l)$ на интервале (a,x) с учетом кратности. Слагаемое πc_2 соответствует последнему слагаемому в формуле (8) и находится предельным переходом при $y_0 \to 0$.

Используя интерполяционную формулу Лагранжа /8/, можно получить связь между производной интенсивности $\partial I(z,l)/\partial l$ и производными координат нулей интенсивности dz_k/dl (движение нулей при смещении плоскости регистрации вдоль направления распространения светового поля):

$$\frac{\partial I(z,l)}{\partial l} = - I(z,l) \sum_m \frac{dz_m/dl}{z - z_m},$$

где суммирование проводится по всем нулям $I(z,l)$. Следовательно, инвариант (5) позволяет определить нули $F(z,l)$ по смещениям нулей $I(z,l)$, что решает задачу поставленную, но не решенную в /7/.

Из формулы (2) следует, что параметры l и $2\pi/k$ эквивалентны и поэтому все вышеприведенное справедливо и при восстановлении фазы поля по измерениям $I(x,\lambda)$ и $\partial I(x,\lambda)/\partial\lambda$ в зоне Френеля, если $f(\xi)$ не зависит от λ.

Таким образом, получен алгоритм однозначного восстановления фазы светового поля по интенсивности и ее производной вдоль направления распространения излучения в зоне Френеля.

Задача восстановления характеристической функции случайного фазового транспаранта по средней интенсивности рассеянного света $\langle I(l) \rangle$ и ее производной изучалась в /9/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обратные задачи в оптике (под. ред. Г.П. Болтса). М., Машиностроение, 1984.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Huiser A. M. J., Ferwerda H. A. Optica Acta, **23**, 445 (1976).
4. Клибанов М. В., Волостников В. Г., Котляр В. В. ДАН СССР, **274**, 1348 (1984).
5. Teague M. R. JOSA, **2**, 2019 (1985).
6. Марчук А. Г. В сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики". Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 130.
7. Ross G. et al. Optica Acta, **26**, 229 (1979).
8. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., Наука, 1971.
9. Волостников В. Г., Котляр В. В., Малов А. Н. Известия ВУЗов, Радиофизика, **27**, 1484 (1984).

Поступила в редакцию 24 марта 1986 г.