Краткие сообщения по физике № 2-1985 г.

УНИТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КОРРЕЛИРОВАННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

В.В. Додонов, Е.В. Курмышев, В.И. Манько

УДК 530.145

Получено явное выражение для унитарного оператора эквивалентности коррелированных когерентных состояний, вычислены интегралы перекрытия между коррелированными состояниями и матричные элементы оператора эквивалентности в коррелированных базисах.

Метод когерентных состояний (КС) /1/ и интегралов движения получил значительное развитие и оказался плодотворным в различных областях квантовой теории /2/. К настоящему времени появились различные обобщения глауберовских КС, лежащих в основе метода /3-9/ (КС группы Гайзенберга – Вейля). Важным аспектом теории КС является унитарная эквивалентность различных классов этих состояний. В работах /3/ были построены классы эквивалентности состояний минимальной неопределенности и приведен явный вид оператора, реализующего эту эквивалентность. Цель данной работы – в явном виде показать унитарную эквивалентность всех известных обобщений КС группы Гайзенберга – Вейля.

В работе /10/ были построены коррелированные когерентные состояния (ККС), минимизирующие обобщенное соотношение неопределенности (при заданном R)

$$\sigma_q\sigma_p - \sigma_{qp}^2 \equiv \sigma_q\sigma_p(1 - R^2) \geqslant \hbar^2/4, \quad |R| < 1, \tag{1}$$

для канонически сопряженных переменных $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Здесь введены обозначения $\sigma_q = \langle(\Delta\hat{q})^2\rangle$, $\sigma_p = \langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$, $\sigma_{qp} = \langle\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} + \Delta\hat{p}\Delta\hat{q}\rangle/2$, $R = \sigma_{qp}/(\sigma_q\sigma_p)^{1/2}$. ККС являются собственными состояниями бозонных операторов уничтожения, которые могут быть представлены в двух эквивалентных формах:

$$\hat{a}(\mu,\chi,\varphi) = e^{i\varphi}(2\mu\hbar\cos\chi)^{-1/2}\,(\hat{q} + i\mu e^{i\chi}\hat{p}), \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \tag{2}$$

$$\hat{a}(u,v) = u\hat{a}_\lambda + v\hat{a}^+_\lambda, \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \tag{3}$$

где $\mu > 0$; $-\pi/2 < \chi < \pi/2$; φ – вещественная фаза; $\hat{a}_\lambda \equiv \hat{a}(\lambda, 0, 0)$; комплексные числа u, v удовлетворяют равенству $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Параметры (μ, χ, φ) связаны с (u, v) следующими соотношениями:

$$u = \frac{e^{i\varphi}(1 + (\mu/\lambda)e^{i\chi})}{2\sqrt{(\mu/\lambda)\cos\chi}}, \quad v = \frac{e^{i\varphi}(1 - (\mu/\lambda)e^{i\chi})}{2\sqrt{(\mu/\lambda)\cos\chi}},$$

$$e^{i\varphi} = \frac{u + v}{|u + v|}, \quad \mu/\lambda = \frac{|u - v|}{|u + v|}, \quad e^{i\chi} = \left(\frac{1 + uv^* - u^*v}{1 - uv^* + u^*v}\right)^{1/2}.$$

В координатном представлении нормированное собственное состояние оператора $\hat{a}(\mu, \chi, \varphi)$, отвечающее комплексному собственному значению α, записывается в виде

$$\Psi_\alpha(x) = \left(\frac{\cos\chi}{\pi\mu\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-e^{-i\chi}\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu\hbar}} - \alpha e^{-i\varphi}\sqrt{\cos\chi}\right)^2 + \frac{\alpha^2 e^{-2i\varphi}}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right]. \tag{4}$$

Для квантовой частицы ККС максимально классично (при заданном коэффициенте корреляции $R = \sin\chi$) в смысле неравенства (1), при этом дисперсии канонических переменных $\hat{q}$, $\hat{p}$ определяются равенствами

$$\sigma_q = (\mu\hbar/2)(1 - R^2)^{-1/2}, \quad \sigma_p = (\hbar/2\mu)(1 - R^2)^{-1/2}.$$

Коррелированные КС, отвечающие различным наборам параметров (μ, χ, φ), образуют унитарно эквивалентные линейные пространства. Получим, следуя методу интегралов движения /2/, оператор $\hat{S}$, который преобразованием подобия переводит оператор $\hat{a}(\mu, \chi, \varphi)$ в оператор $\hat{a}(\mu', \chi', \varphi')$. Квантовая система, описываемая уравнением Шредингера с эрмитовым стационарным гамильтонианом

$$\hat{H} = [d_0(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) + d_1\hat{a}^2 + d_1^*\hat{a}^{+2}]/2, \tag{5}$$

где $\hat{a} \equiv \hat{a}(\mu, \chi, 0)$; число d_0 – вещественное; $d_1 \equiv -\beta + i\gamma$ – комплексное, обладает интегралом движения ($\hat{U}(t)$ – оператор эволюции)

$$\hat{A}(t) = \hat{U}\hat{a}(\mu, \chi)\hat{U}^{-1} = \xi(t)\hat{a}(\mu, \chi) + \eta(t)\hat{a}^+(\mu, \chi), \quad [\hat{A}, \hat{A}^+] = 1, \tag{6}$$

причем комплексные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют уравнениям ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} i d\xi/dt &= -\xi d_0 + \eta d_1, \quad \xi(0) = 1, \\ i d\eta/dt &= -\xi d_1^* + \eta d_0, \quad \eta(0) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (7) имеют решения:

$$\xi(t) = (2\lambda)^{-1}[e^{\lambda t}(\lambda + id_0) + e^{-\lambda t}(\lambda - id_0)],$$
$$\eta(t) = id_1^*(2\lambda)^{-1}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}),\ \lambda = (\beta^2 + \gamma^2 - d_0^2)^{1/2}. \qquad (8)$$

Произвольный бозонный оператор $\hat{a}(\mu', \chi', 0)$ выражается через операторы $\hat{a}(\mu, \chi, 0)$ и $\hat{a}^+(\mu, \chi, 0)$ в следующей форме:

$$\hat{a}(\mu', \chi') = (4\cos\chi'\cos\chi)^{-1/2}\left\{\hat{a}[e^{-i\chi}(\mu/\mu')^{1/2} + e^{i\chi'}(\mu'/\mu)^{1/2}] + \right.$$
$$\left. + \hat{a}^+[e^{i\chi}(\mu/\mu')^{1/2} - e^{i\chi'}(\mu'/\mu)^{1/2}]\right\}. \qquad (9)$$

Для стационарной квантовой системы с гамильтонианом $\hat{H}$ оператор эволюции представим в виде $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$. Отождествление оператора $\hat{a}(\mu', \chi')$ (9) с интегралом движения $\hat{A}(t)$ (6) в момент времени $t = 1$ приводит к уравнениям

$$\xi(1) = (4\cos\chi'\cos\chi)^{-1/2}[e^{-i\chi}(\mu/\mu')^{1/2} + e^{i\chi'}(\mu'/\mu)^{1/2}],$$
$$\eta(1) = (4\cos\chi'\cos\chi)^{-1/2}[e^{i\chi}(\mu/\mu')^{1/2} - e^{i\chi'}(\mu'/\mu)^{1/2}], \qquad (10)$$

которые позволяют получить коэффициенты d_0, d_1 вспомогательного гамильтониана (5), определяющего искомый оператор эквивалентности. Подстановка решений (8) в уравнения (10) приводит к следующей окончательной форме для оператора унитарной эквивалентности:

$$\hat{S} = \hat{U}\exp[i(\varphi - \varphi')\hat{a}^+\hat{a}];\quad \hat{U} = \exp(-i\hat{H});$$
$$\hat{H} = [\beta(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) - \beta(\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2}) + i\gamma(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})]/2;$$
$$\beta = \gamma\frac{\mu'\sin\chi' - \mu\sin\chi}{\mu\cos\chi - \mu'\cos\chi'};\quad \gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{\mu\cos\chi}{\mu'\cos\chi'}; \qquad (11)$$
$$\hat{a} \equiv \hat{a}(\mu, \chi, 0);\ \hat{a}^+ \equiv \hat{a}^+(\mu, \chi, 0);\ \mu, \mu' > 0;\ -\pi/2 < \chi, \chi' < \pi/2.$$

(При выводе (11) было использовано равенство $\hat{a}e^z = e^{-z\hat{a}^+\hat{a}}\hat{a}e^{z\hat{a}^+\hat{a}}$). Оператор $\hat{S}$ в явном виде реализует унитарную эквивалентность на множестве операторов $\{\hat{a}(\mu, \chi, \varphi)\}$, которые порождают ККС: $\hat{a}(\mu', \chi', \varphi') = \hat{S}\hat{a}(\mu,\chi,\varphi)\hat{S}^+$, $\hat{a}(\mu', \chi', 0) = \hat{U}\hat{a}(\mu, \chi, 0)\hat{U}^+$. Состояние $|\alpha, \mu', \chi', \varphi'\rangle = \hat{S}|\alpha, \mu, \chi, \varphi\rangle$ является собственным для оператора $\hat{a}(\mu', \chi', \varphi')$ с собственным значением α.

Интеграл перекрытия ККС (4) в параметризации (u, v) равен

$$\langle a, u', v'|\beta, u, v\rangle = \left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{u'^* - v'^*}{u' - v'} \quad \frac{u - v}{u^* - v^*}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{|a|^2 + |\beta|^2}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{a^{*2}}{2} \quad \frac{(u' - v')\Delta - (u - v)}{(u'^* - v'^*)\Delta} - \frac{\beta^2}{2} \quad \frac{(u^* - v^*)\Delta - (u'^* - v'^*)}{(u - v)\Delta} + \frac{a^*\beta}{\Delta}\right\}, \tag{12}$$

где $\Delta = uu'^* - vv'^*$. Матричные элементы оператора $\hat{S}$ (11) в представлении КС и ККС очевидно равны между собой

$$\langle a, 1, 0|\hat{S}|\beta, 1, 0\rangle = \langle a, u, v|\hat{S}|\beta, u, v\rangle = \langle a, 1, 0|\beta, u, v\rangle. \tag{13}$$

Разложение выражений (12), (13) в ряд по степеням комплексных параметров a^*, β дает выражения для интегралов перекрытия коррелированных фоковских состояний (собственных состояний оператора $\hat{a}^+(\mu, \chi)\hat{a}(\mu, \chi)$) и, соответственно, матричных элементов оператора $\hat{S}$ в базисе КФС /11/.

Любой бозонный оператор уничтожения, являющийся линейной однородной комбинацией операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$, можно представить в форме (2). Следовательно все известные обобщения КС /3-9/ являются ККС и унитарно эквивалентны друг другу (11). Используя унитарную эквивалентность ККС глауберовским КС, легко показать, что ККС обладают всеми аналитическими свойствами обычных КС (разложение единичного оператора и т.п.), однако более широкая параметризация (μ, χ, φ) в сравнении с $(\mu, 0, 0)$ для КС делает коррелированные КС более удобными и адекватными при описании физических свойств различных систем. Более того, в последнее время выясняется, что подкласс ККС – "сжатые состояния", оказывается важным с прикладной точки зрения. В частности, существенным элементом разрабатываемых гравитационных антенн второго поколения является система, приготавливающая детектор (например, моду электромагнитного поля в резонаторе) именно в "сжатом" квантовом состоянии /6-8, 12/.

Поступила в редакцию 30 октября 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauber R.J. Phys. Rev., 131, 2766 (1963).
2. Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., Наука, 1979.
3. Stoler D. Phys. Rev., D1, 3217 (1970); D4, 1925, 2309 (1971).

4. L u E.Y.C. Lett. Nuovo Cim., 2, 1241 (1971); 3, 585 (1972).
5. Y u e n H.P. Phys. Rev., A13, 2226 (1976).
6. H o l l e n h o r s t J.N. Phys. Rev., D19, 1669 (1979).
7. C a v e s C.M. Phys. Rev., D23, 1693 (1981).
8. W a l l s D.F. Nature, 306, № 5939, 141 (1983).
9. F i s h e r R.A., N i e t o M.M., S a n d b e r g V.D. Phys. Rev., D29, 1107 (1984).
10. D o d o n o v V.V., K u r m y s h e v E.V., M a n' k o V.I. Phys. Lett., 79A, 150 (1980).
11. Д о д о н о в В.В., К у р м ы ш е в Е.В., М а н ь к о В.И. Препринт ФИАН № 259, М., 1984.
12. C a r m i c h a e l H.J., M i l b u r n G.J., W a l l s D.F. J. Phys. A, 17, 469 (1984).