КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА, ОКРУЖЕННОГО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Е.А. Заболотская, В.А. Казаков

УДК 534.222.2

В приближении несжимаемой жидкости выведено уравнение колебаний газового пузырька, окруженного слоем жидкости. Вычислена частота собственных малых колебаний такого пузырька.

Пусть газовый пузырек, окруженный сферическим слоем одной жидкости, находится в другой жидкости, не смешивающейся с первой. Выведем уравнение его движения в приближении несжимаемой жидкости. Кинетическая энергия присоединенной массы жидкости равна

$$T = 2\pi\rho_2 v_1^2 R_1^3 \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{R_2}\right],$$

где ρ_1, ρ_2 – плотность жидкости слоя и окружающей слой среды соответственно; R_1 – радиус пузырька; R_2 – радиус сферы, окружающей пузырек; $v = \dot{R}_1$ – скорость стенки пузыря.

Потенциальная энергия газа выражается через давление газа P, гидростатическое давление в жидкости P_0 и объем пузырька w: $U = -\int (P - P_0)\,dw$. Из лагранжиана такой системы получаем уравнение для радиуса газового пузырька:

$$\ddot{R}_1 R_1 \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{R_2}\right] + \frac{3}{2}\dot{R}_1^2 \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1^4}{3R_2^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^4}{3R_2^4}\right] = \frac{1}{\rho_2}(P - P_0). \qquad (1)$$

Здесь точками обозначены производные по времени. Если плотность слоя

ρ_1 близка к плотности жидкости, заполняющей все пространство, ρ_2, $\rho_1 \approx \approx \rho_2$, то уравнение (1) переходит в уравнение Рэлея /1/. То же самое имеет место при малой толщине слоя, $R_1 \to R_2$.

Из уравнения (1) можно получить выражение для частоты малых колебаний такого пузырька:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_{10}^2} \; \frac{3\gamma P_0}{\rho_2\left[\dfrac{R_{10}}{R_{20}} + \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \dfrac{R_{10}}{R_{20}}\right)\right]}, \qquad (2)$$

где индексом "0" обозначены равновесные значения соответствующих величин. Формула (2) получена в предположении адиабатичности движения газа в пузырьке, γ – показатель адиабаты. Изменение собственной частоты пузырька, окруженного слоем жидкости, обусловлено изменением присоединенной массы жидкости.

Если размеры пузырька малы, то существенную роль начинает играть поверхностное натяжение. При этом изменяется потенциальная энергия системы:

$$U = -\int (P - P_0)\, dw + 4\pi R_1^2 \sigma_1 + 4\pi R_2^2 \sigma_2 ,$$

где σ_1 и σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения на границе "газ – жидкий слой" и на границе двух жидкостей соответственно.

Уравнение движения в данном случае имеет вид:

$$\ddot{R}_1 R_1\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{R_2}\right] + \frac{3}{2}\dot{R}_1^2\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{3}\,\frac{R_1^4}{R_2^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\,\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{3}\,\frac{R_1^4}{R_2^4}\right] + \frac{2\sigma_1}{\rho_2 R_1} + \frac{2\sigma_2}{R_2 \rho_2} = \frac{1}{\rho_2}(P - P_0).$$

Собственная частота пузырька, окруженного слоем жидкости, с учетом поверхностного натяжения на границах разделов равна:

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma P_0 + (3\gamma - 1)\dfrac{2\sigma_1}{R_{10}} + \left[3\gamma - \left(\dfrac{R_{10}}{R_{20}}\right)^3\right]\dfrac{2\sigma_2}{R_{20}}}{\rho_2 R_{10}^2\left[\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \dfrac{R_{10}}{R_{20}}\right) + \dfrac{R_{10}}{R_{20}}\right]} \qquad (3)$$

Выражение (3) при $\rho_1 \to \rho_2$, $\sigma_1 \to \sigma_2$ и $R_{10} \to R_{20}$ совпадает с формулой для собственной частоты пузырька в несжимаемой жидкости с учетом поверхностного натяжения /2/.

Таким образом, резонансные свойства пузырьков, пульсирующих в жидкостях, образующих около пузырька слои, могут меняться как за счет изменения присоединенной массы жидкости, так и за счет дополнительного поверхностного натяжения между слоями несмешивающихся жидкостей. Рассмотренное здесь явление может играть существенную роль при распространении звуковых волн в многокомпонентных средах.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию 8 октября 1984 г.
После переработки 24 декабря 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
2. Клей К., Медвин Г. Акустическая океанография. М., Мир, 1980.