

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНТОЧНОГО СИЛЬНОТОЧНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

А.В. Агафонов, А.А. Фарамазян

В длинноволновом низкочастотном приближении исследована устойчивость самосогласованного равновесного состояния ленточного сильноточного электронного пучка, распространяющегося в вакууме в магнитном поле.

Равновесное состояние. Рассмотрим ленточный пучок, движущийся между проводящими плоскостями, расположенными при $x = \pm d$, во внешнем магнитном поле B_{z0} . Система однородна в y - и z -направлениях. Стационарное состояние пучка можно описать гидродинамическими уравнениями с нулевой температурой, дополненными двумя условиями. В качестве таких условий выберем моноэнергетичность пучка и постоянство продольной скорости V_{z0} по его сечению. Последнее без ограничения общности позволяет потребовать $V_{z0} = 0$ за счет выбора соответствующей системы отсчета. Таким образом, в стационарном состоянии пучок дрейфует со скоростью $\beta_{y0} = V_{y0}/c$ в скрещенных собственном электрическом E_{x0} и полном (внешнее плюс собственное) магнитном B_z полях в направлении оси y .

Уравнение, описывающее распределение потенциала внутри пучка, имеет вид:

$$(\gamma' / \sqrt{\gamma^2 - 1})' = 0, \tag{1}$$

где штрих означает производную по поперечной координате x ; γ — релятивистский фактор, связанный с электростатическим потенциалом φ условием $\gamma_0 = \gamma + e\varphi/mc^2$; γ_0 — релятивистский фактор инжектируемых электронов. Обозначим через x_0 положение плоскости внутри пучка, в которой частицы имеют нулевую скорость $\beta_{y0}(x_0) = 0$. Если $B_{z0} < 0$, то выше плоскости x_0 частицы движутся в положительном направлении оси y , а ниже — в отрицательном. Воспользовавшись решением уравнения (1) $\gamma = \text{ch} [\omega_p(x - x_0)]$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n/m\gamma} = \text{const}$ — "утяжеленная" плазменная частота, получим:

$$\beta_{y0} = \text{th} [\omega_p(x - x_0)], \quad E = \omega_p \text{sh} [\omega_p(x - x_0)], \quad B = -\omega_p \text{ch} [\omega_p(x - x_0)].$$

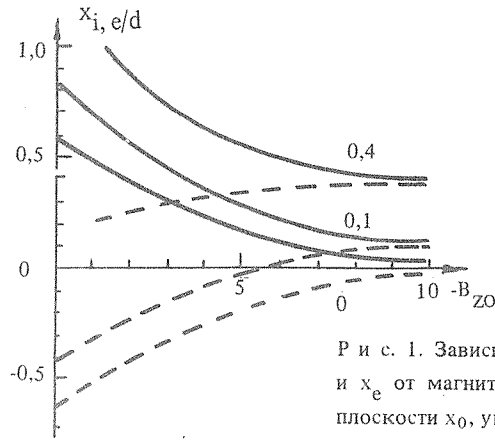
Вне пучка потенциал ведет себя линейно. Требуя непрерывности потенциала и электрического поля на границах пучка и учитывая, что на стенках камеры $\gamma = \gamma_0$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_e &= -\omega_p \text{ch} [\omega_p(x_e - x_0)]; \quad \gamma_0 + \omega_p(x_e - 1) \text{sh} [\omega_p(x_e - x_0)] = \text{ch} [\omega_p(x_e - x_0)]; \\ B_i &= -\omega_p \text{ch} [\omega_p(x_i - x_0)]; \quad \gamma_0 + \omega_p(x_i + 1) \text{sh} [\omega_p(x_i - x_0)] = \text{ch} [\omega_p(x_i - x_0)], \end{aligned} \tag{2}$$

где B_e и B_i — магнитные поля на внешней и внутренней поверхностях пучка; x_0 , x_i и x_e измеряются в единицах d , а ω_p , E и $B_{i,e}$ — в единицах $e = m = c = 1$. В реальных условиях время существования пучка меньше, чем характерное время диффузии магнитного поля сквозь стенки камеры [1]. Поэтому вместо того, чтобы задавать поля B_e или B_i и отождествлять их с внешним полем, потребуем сохранения магнитного потока и зададим внешнее магнитное поле B_{z0} . Условие сохранения магнитного потока

$$\int_{-1}^1 B_{z0} dx = 2B_{z0} = B_i(1 + x_i) + B_e(1 - x_e) + \int_{x_i}^{x_e} B dx \tag{3}$$

замыкает систему (2). Единственным свободным параметром остается положение плоскости нулевой скорости частиц x_0 .



Р и с. 1. Зависимости положения границ пучка x_i (пунктир) и x_e от магнитного поля при различных положениях осевой плоскости x_0 , указанных цифрами в единицах d .

На рис. 1 показана зависимость положения границ пучка от B_{Z0} при различных значениях $x_0 > 0$. При $x_0 < 0$ зависимости симметричны указанным. Отметим существование "бессильных" равновесий с $B_{Z0} = 0$, реализующихся в диапазоне изменения x_0 от 0 до $< 0,4$. Так как в рамках самосогласованного стационарного состояния все основные параметры пучка ω_p , $x_{i,e}$, $\gamma_{i,e}$, $V_{i,e}$ связаны соотношениями (2), при анализе устойчивости равновесия нельзя выбирать произвольно ни один из них. Например, в рамках рассматриваемой модели толщина пучка $x_e - x_i \propto B_{Z0}^{-2}$, а $\omega_p \propto B_{Z0}$, поэтому малым параметром в области больших магнитных полей является произведение этих параметров.

Волновые поля. Предполагая, что все возмущения зависят от $\exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z)$, получаем следующую систему уравнений для волновых полей [2]:

$$\begin{aligned} [(\gamma^2 l^2 - \omega_p^2) \mathcal{E}' + \mathcal{E}(\kappa^2 + \omega_p^2)(\gamma^2 l^2 - \omega_p^2)] &= 0, \\ E_Z'' + \kappa^2 E_Z &= 2k_z \omega_p^3 \gamma \mathcal{E}' / (\gamma^2 l^2 - \omega_p^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\kappa^2 = \omega^2 - k_z^2 - k_y^2 - \omega_p^2$; $l = \omega - k_y \beta_{y0}$; $\mathcal{E} = E_y / \gamma l$; E_Z и E_y — возмущения составляющих электрического поля.

Граничные условия. Смещения границ пучка при наличии возмущений в линейном приближении эквивалентны появлению на границах поверхностного заряда σ и поверхностного тока $\sigma \beta_{y0}$. Поэтому граничные условия соответствуют непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля и скачку их первых производных на границах пучка:

$$\Delta E_y = 0; \quad \Delta E_z = 0; \quad \Delta E_y' = 4\pi i \sigma (\omega \beta_{y0} - k_y); \quad \Delta E_z' = -4\pi i \sigma k_z. \quad (5)$$

Решения вакуумных волновых уравнений для E_y и E_z в плоской геометрии представляют собой комбинацию $a \sin \kappa_0 x + b \cos \kappa_0 x$, где $\kappa_0^2 = \omega^2 - k_y^2 - k_z^2$. Полагая $E_y = 0$, $E_z = 0$ на стенках камеры, получаем четыре граничных условия (по два на каждой стенке), замыкающие систему (5).

Низкочастотные колебания пучка. Рассмотрим низкочастотные колебания пучка, предполагая, что ω , k_y , $k_z \ll \omega_p$. Ввиду сложности получающегося дисперсионного уравнения проанализируем по отдельности распространение волн вдоль и поперек магнитного поля.

В случае $k_z = 0$ граничные условия (5) и уравнения (4) для волновых полей расщепляются на подсистемы для \mathcal{E} и E_Z . В принятом приближении уравнение (4) для \mathcal{E} упрощается: $\mathcal{E}'' + \kappa_0^2 \mathcal{E} = 0$. Его решение имеет вид: $E_y = C_1 \gamma l \operatorname{arth} \beta_{y0} + C_2 \gamma l$. Вводя фазовую скорость $\beta_\Phi = \omega / k_y$ и рассматривая длинноволновые колебания $k_y d \ll 1$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\gamma_e^2 (\beta_\Phi - \beta_e)^2 [\gamma_i^2 (\beta_\Phi - \beta_i)^2 (x_e - x_i) + (\beta_\Phi^2 - 1)(1 + x_i)] - \gamma_i^2 (\beta_\Phi - \beta_i)^2 (\beta_\Phi^2 - 1)(x_e - 1) = 0. \quad (6)$$

В случае симметричного пучка ($x_0 = 0$, $x_e = -x_i = x$, $\gamma_i = \gamma_e = \gamma$ и $\beta_e = -\beta_i = \beta$) решение уравнения (6) имеет вид:

$$\beta_{\Phi}^2 = \frac{2\beta^2\gamma^2 - 1 + x \pm \sqrt{4\beta^4\gamma^2[\gamma^2(1-x^2) - 1 + x] + (1-x)^2}}{2\gamma^2(\gamma^2\beta^2x + 1)}$$

Отсюда видно, что тонкий пучок неустойчив. При возрастании толщины пучка электростатическая неустойчивость электронного потока в скрещенных полях, соответствующая слиппинг-неустойчивости, стабилизируется. В общем случае $x_0 \neq 0$ дисперсионное уравнение (6) решалось численно. На рис. 2 показаны области устойчивых решений в координатах x_e , x_i .

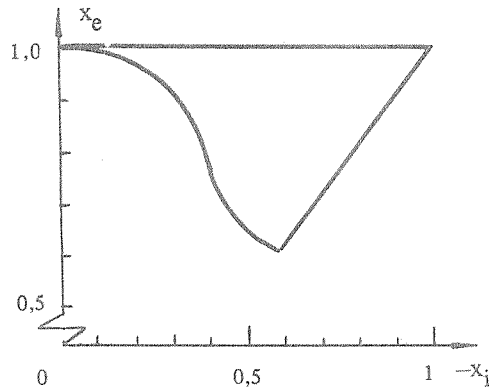


Рис. 2. Область устойчивости пучка.

В случае распространения волн вдоль магнитного поля ($k_y = 0$) волновые уравнения и граничные условия не расщепляются и дисперсионное уравнение имеет более громоздкий вид, чем (6). Однако в длинноволновом приближении и симметричном случае можно получить простые выражения для фазовых скоростей волн

$$\beta_{\Phi}^2 = \omega^2/k_z^2 = \omega_p(1-x)/\gamma^2[\beta + \omega_p(1-x)], \quad (7)$$

соответствующие волнам пространственного заряда в виде продольной группировки частиц, сопровождающейся изменением поперечного сечения пучка. Из (7) следует, что в продольном направлении пучок устойчив.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов А.В. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, 3 (1982).
2. Агафонов А.В., Лебедев А.Н. ЖТФ, 47, 1729 (1977).

Поступила в редакцию 5 октября 1985 г.