Краткие сообщения по физике № 2·1986 г.

УДК 530.1

РЯДЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША – ГОРДАНА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ SU (2,1)

А.Л. Шелепин

Получены общее выражение для ряда Клебша – Гордана представлений дискретной серии со старшим (младшим) весом группы SU (2,1) и соответствующие ему коэффициенты Клебша – Гордана, связывающие некратные веса, а так же формулы редукции на подгруппы SU (2) и SU (1,1).

Одной из наиболее сложных задач теории представлений некомпактных групп является разложение прямого произведения представлений на неприводимые в ряд Клебша – Гордана (КГ) /1–6/. Она может быть эффективно решена с помощью метода производящих инвариантов (ПИ). Ниже для группы SU (2,1), являющейся подгруппой SU (2,2), получены конкретные формулы.

Рассмотрим сначала простой алгебраический способ получения унитарных неприводимых представлений SU (2,1). Будем исходить из коммутационных соотношений алгебры $sl(n, R)$:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj}A_{il} - \delta_{il}A_{kj}. \tag{1}$$

Условие эрмитовости генераторов группы U (m,n), линейно выражающихся через генераторы A_{ik} ($M_{kk} = A_{kk}$; $M_{kl} = A_{kl} + A_{lk}$, $\widetilde{M}_{kl} = i(A_{kl} - A_{lk})$, $k < l \leqslant m$ или $m < k < l$; $N_{kl} = A_{kl} - A_{lk}$, $\widetilde{N}_{kl} = i(A_{kl} + A_{lk})$, $k \leqslant m < l$), налагает на A_{ik} следующие условия /1/:

$$A^{+}_{kl} = \epsilon_{kl}A_{lk}, \tag{2}$$

где $\epsilon_{kl} = +1$, если $k, l \leqslant m$ или $m < k, l$; $\epsilon_{kl} = -1$, если $k \leqslant m < l$ или $l \leqslant m < k$. Введем для группы SU (2,1) базис из собственных функций коммутирующих операторов A_{ii}: $A_{ii}|p_1 p_2 p_3\rangle = p_i|p_1 p_2 p_3\rangle$. С помощью коммутационных соотношений (1) получаем

$$A_{12}|p_1 p_2 p_3\rangle = \sqrt{(p_1+1)p_2}\,|p_1+1\ \ p_2-1\ \ p_3\rangle,\ \ A_{21}|p_1 p_2 p_3\rangle = \sqrt{p_1(p_2+1)}\,|p_1-1\ \ p_2+1\ \ p_3\rangle,\ \text{и т. п.} \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что условием унитарности представления для SU (2,1) является

$$\begin{array}{lll} p_1(p_2+1) \geqslant 0, & p_2(p_3+1) \leqslant 0, & p_1(p_3+1) \leqslant 0, \\ p_2(p_1+1) \geqslant 0, & p_3(p_2+1) \leqslant 0, & p_3(p_1+1) \leqslant 0. \end{array} \tag{4}$$

Для SU (3) знак в (4) везде $\geqslant 0$, для SL (3,R) – везде $\leqslant 0$.

С помощью операторов A_{ij} можно достигнуть веса данного неприводимого представления, двигаясь от любого веса этого представления; там, где численный множитель в (3) равен нулю, представление обрывается, достигается старший (младший) вес. Используя (3) и (4), получаем следующую классификацию неприводимых унитарных представлений с некратными весами (рис. 1а) (области, где удовлетворяется (4), обозначены D^+ и D^-; рисунок отвечает $P < -3$):

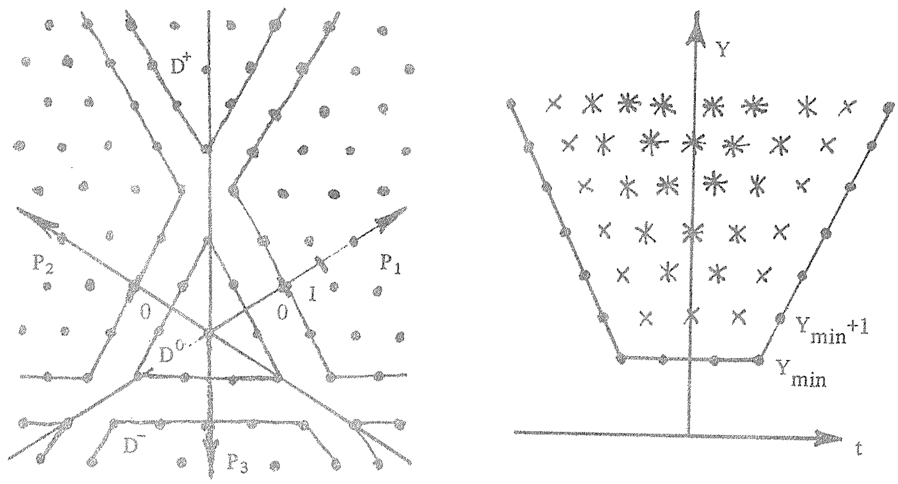
1) представление $D(P^+0)$ (область D^+), $P < 0$, $P = p_1 + p_2 + p_3$;

2) представление $D(0Q^-)$ (область D^-), $Q = -P - 3$, $Q < 0$.

Условия унитарности для группы SU (3) выполняются в области D^o; она отвечает конечномерным представлениям $D(P^o0)$ при $P \geqslant 0$ и $D(0Q^o)$, $Q = -P - 3$, $Q \geqslant 0$, P и Q – целые.

В разложение прямого произведения $D(P^+0) \otimes D(P^+0)$, как показано ниже, будут входить только представления дискретной серии $D(P^+Q^o)$, где Q – целое неотрицательное. Весовая диаграмма этого представления представлена на рис. 1б. Представление $D(P^+Q^o)$ имеет $Y_{min} = -(2P + Q)/3$; $Q + 1$ –

младший вес при $Y = Y_{min}$, кратности весов нарастают от 1 до Q + 1 при отходе от края весовой диаграммы. Оно унитарно, если $P + Q < 0$; при $P < 0$ и нецелом $P > 0$ представление $D(P^{+}Q^{0})$ неприводимо; при целом положительном P – приводимо и содержит инвариантное конечномерное подпространство, соответствующее $D(P^{0}Q^{0})$, но не является вполне приводимым /2/.



а б

Р и с. 1. Весовые диаграммы представлений дискретной серии группы SU (2,1).

Сопряженное представление $D(P^{0}Q^{-})$, $P \geqslant 0$, целое, имеет старший вес $Y_{max} = (P + 2Q)/3$ и унитарно при $P + Q > 0$; весовая диаграмма получается из весовой диаграммы $D(Q^{+}P^{0})$ отражением относительно оси $Y = 0$. $D(P^{+}Q^{0})$ и $D(P^{0}Q^{-})$ отвечают следующие схемы Гельфанда – Цетлина:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3}(Q-P) & & \frac{1}{3}(-P-2Q) & & \frac{1}{3}(P-2Q) \\ & T+\frac{Y}{2} & & -T+\frac{Y}{2} & \\ & & t+\frac{Y}{2} & & \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3}(-Q+2P) & & \frac{1}{3}(-Q-2P) & & \frac{1}{3}(-P+Q) \\ & T+\frac{Y}{2} & & -T+\frac{Y}{2} & \\ & & t+\frac{Y}{2} & & \end{array}\right|$$

Весовая диаграмма представлений $D(P^{+}Q^{0})$ позволяет установить формулы редукции на подгруппы SU (2) и SU (1,1):

$$D(P^{+}Q^{0}) = \sum_{a=0}^{\min\{Q,S\}} \sum_{s=0}^{\infty} D^{0}\left(\frac{Q+S-2a}{2}\right); \quad D(P^{+}Q^{0}) = \sum_{a=0}^{\min\{Q,S\}} \sum_{s=0}^{\infty} D^{+}\left(\frac{P-S+2a}{2}\right). \quad (5)$$

При $Q = 0$ представления подгрупп в (5) входят с единичной кратностью. Разложение неунитарных $D(P^{+}Q^{0})$, $Q + P > 0$ будет содержать неунитарные $D^{+}(j)$, $j > 0$, группы SU (1,1). Проекция момента для подгрупп SU (1,1): $m = 3Y/4 - t/2$ и $m' = 3Y/4 + t/2$ (m и m' – собственные значения генераторов $(A_{22} - A_{33})/2$ и $(A_{11} - A_{33})/2$).

Перейдем к построению рядов КГ методом ПИ, который использовался в /4,5/ для получения рядов и коэффициентов КГ групп SU(N). Он может быть распространен на представления некомпактных групп.

Симметричный базис группы SU (2,1) имеет вид /2,3/;

$$\left|\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{matrix}\right\rangle = \left[\frac{\Gamma(P+1)}{\Gamma(p_1+1)\Gamma(p_2+1)\Gamma(p_3+1)} \quad \frac{\Gamma(Q+1)}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)\Gamma(q_s+1)}\right]^{1/2} u_1^{p_1} u_2^{p_2} u_3^{p_3} \zeta_1^{q_1} \zeta_2^{q_2} \zeta_3^{q_3},$$

где $P = p_1 + p_2 + p_3$, $Q = q_1 + q_2 + q_3$, отличающийся от базиса SU (3) лишь заменой факториалов на гамма-функцию; для рассматриваемой серии $D(P^+Q^0)$, $q_i \geqslant 0$, целые, $p_1, p_2 \geqslant 0$, целые, p_3 – вещественное. Группа SU (2,1) имеет два типа инвариантов: свертку $(u\zeta) = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 - u_3\zeta_3$ и детерминант $(\epsilon_{ikl} u_i v_k w_l)$.

Рассмотрим $(u\zeta)^P$. Разложение тринома в ряд при целом неотрицательном P соответствует свертке конечномерных представлений $D(P^0 0) \otimes D(0P^0)$, сумма конечна; при $P > 0$ нецелом – свертке неунитарных представлений дискретной серии $D(P^+0) \otimes D(0P^-)$, при $P < 0$ – свертке унитарных представлений $D(P^+0) \otimes D(0P^-)$:

$$(u\zeta)^P = \sum_{p_2=0}^{\infty} \sum_{p_1=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-P+p_1+p_2)}{\Gamma(-P)\, p_1!\, p_2!} [u_1^{p_1} u_2^{p_2} u_3^{P-p_1-p_2}][\zeta_1^{p_1} \zeta_2^{p_2} \zeta_3^{P-p_1-p_2}].$$

Симметризации $D(P_1^+0) \otimes D(P_2^+0) \to D(P_1 + P_2^+ 0)$ отвечает ПИ

$$(u\zeta)^{P_1} (u\eta)^{P_2} = \sum_{p'_1=0}^{\infty} \sum_{p'_2=0}^{\infty} \sum_{p''_1=0}^{\infty} \sum_{p''_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-P_1+p'_1+p'_2)}{\Gamma(-P_1)\, p'_1!\, p'_2!} \frac{\Gamma(-P_2+p''_1+p''_2)}{\Gamma(-P_2)\, p''_1!\, p''_2!} \times$$

$$\times [u_1^{p'_1+p''_1} u_2^{p'_1+p''_2} u_3^{P_1+P_2-p'_1-p'_2-p''_1-p''_2}][\zeta_1^{p'_1} \zeta_2^{p'_2} \zeta_3^{P_1-p'_1-p'_2}][\eta_1^{p''_1} \eta_2^{p''_2} \eta_3^{P_2-p''_1-p''_2}]. \tag{6}$$

Общий вид ПИ для прямого произведения двух представлений аналогичен SU(3) /5/:

$$(u\zeta)^{P_1-S_1} (v\zeta)^{P_2-S_2} (u\eta)^{A'} (w\eta)^{Q_2-S_2} (v\psi)^{A''} (w\psi)^{Q_1-S_1} (\epsilon_{ikl} u_i v_k w_l)^{S_1} (\epsilon_{ikl} \zeta_i \eta_k \psi_l)^{S_2}. \tag{7}$$

Ряды КГ могут быть получены из сравнения разложения (7) с произведением базисов перемножаемых представлений. В разложение должны входить только те члены, которые имеются в наборе базисных векторов $D(P_1Q_1) \otimes D(P_2Q_2)$. Это условие накладывает ограничение на значение степеней инвариантов в (7); отсюда имеем следующие выражения для рядов КГ:

$$D(P_1^+Q_1^0) \otimes D(P_2^+Q_2^0) = \sum_{A=0}^{C_1} \sum_{S_1=0}^{\infty} \sum_{S_2=0}^{\min\{Q_1,Q_2\}} D(P^+Q^0), \tag{8}$$

$$D(P_1^+Q_1^0) \otimes D(P_2^0Q_2^0) = \sum_{A=0}^{C_2} \sum_{S_1=0}^{P_2} \sum_{S_2=0}^{\min\{Q_1,Q_2\}} D(P^+Q^0), \tag{9}$$

$$D(P_1^0Q_1^0) \otimes D(P_2^0Q_2^0) = \sum_{A=0}^{C_3} \sum_{S_1=0}^{\min\{P_1,P_2\}} \sum_{S_2=0}^{\min\{Q_1,Q_2\}} D(P^0Q^0), \tag{10}$$

$P = P_1 + P_2 - 2S_2 + S_1 - A$, $Q = Q_1 + Q_2 - 2S_2 + S_1 - A$, $C_1 = Q_1 + Q_2 - 2S_2$, $C_2 = Q_2 - S_2 + \min\{P_2 - S_1, Q_1 - S_2\}$, $C_3 = \min\{P_2 - S_1, Q_1 - S_2\} + \min\{P_1 - S_1, Q_2 - S_2\}$. Ряд (10) совпадает с рядом для конечномерных представлений группы SU (3) /5/. Как и в случае $D^+(j)$ дискретной серии групп SU (1,1), произведение унитарных представлений дискретной серии группы SU (2,1) разлагается в бесконечный ряд, содержащий снова только унитарные представления той же серии.

Коэффициенты КГ (ККГ) в симметрическом базисе могут быть получены как коэффициенты перед нормированным произведением базисов в разложении (7). Приведем только коэффициенты, связывающие некратные веса, т. к. их значение не зависит от выбора базиса (схемы редукции на подгруппы SU (2) или SU (1,1)). Симметризации $D(P_1^+0)\otimes D(P_2^+0) \to D(P_1 + P_2^+0)$, согласно (6), отвечает ККГ

$$\left\langle \begin{matrix} P_1^+0 \\ p_i' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2^+0 \\ p_i'' \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1 + P_2^+0 \\ p_i = p_i' + p_i'' \end{matrix} \right\rangle = \left(\frac{\Gamma(-p_3')\Gamma(-p_3'')\Gamma(p_1+p_2)p_1!p_2!}{\Gamma(-P_1)p_1'!p_2'!\Gamma(-P_2)p_1''!p_2''!\Gamma(p_3)} \right)^{1/2},$$

где $T = (p_1 + p_2)/2$, $t = (p_1 - p_2)/2$, $Y = P/3 - p_3$. ККГ, связывающие некратные веса, лежащие на краях весовых диаграмм, являются ККГ – подгрупп: SU (2) и SU (1,1)

$$\left\langle \begin{matrix} P_1^+Q_1^0 \\ Y_{\min 1}T_1t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2^+Q_2^0 \\ Y_{\min 2}T_2t_2 \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1 + P_2 + S^+ \quad Q_1 + Q_2 - 2S^0 \\ Y_{\min 1} + Y_{\min 2} \quad T \quad t \end{matrix} \right\rangle = \langle T_1 t_1 | T_2 t_2 \| T t \rangle_{SU(2)},$$

$$\left\langle \begin{matrix} P_1^+Q_1^0 \\ Y_1 T_{\max 1} \quad T_{\max 1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_2^+Q_2^0 \\ Y_2 T_{\max 2} \quad T_{\max 2} \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} P_1 + P_2 - 2S^+ \quad Q_1 + Q_2 + S^0 \\ Y_1 + Y_2 \quad T_{\max 1} + T_{\max 2} \quad T_{\max 1} + T_{\max 2} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{P_1}{2} \; m_1 \middle| \frac{P_2}{2} \; m_2 \middle\| \frac{P_1 + P_2 - 2S}{2} \quad m_1 + m_2 \right\rangle_{SU(1,1)},$$

где $m = 3Y/4 + T/2$. Выражения ККГ SU (1,1) для связывания дискретных серий совпадают с точностью до замены параметров с ККГ SU (2) /1/. Представляет значительный интерес выяснение того, в какой мере это переносится на ККГ дискретной серии SU (2,1) и SU (3).

Автор признателен В.Я. Файнбергу за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. т. I, II, М., Мир, 1980.
2. Fronsdal C. Proc. Roy. Soc. London, A288, 98 (1965).
3. Фронсдел К. Теория представлений некомпактных алгебр Ли. В кн. Теория групп и элементарные частицы. М., Мир, 1967.
4. Карасев В.П. Труды ФИАН, 70, 147 (1973).
5. Шелепин Л.А. Труды ФИАН, 70, 3 (1973).
6. Barut A.O., Fronsdal C. Proc. Roy. Soc., London, A287, 532 (1965).

Поступила в редакцию 17 декабря 1985 г.