Краткие сообщения по физике № 3-1986 г.

УДК 534.833.53

МОДЫ КОЛЕБАНИЙ В ГАЗОВЫХ СМЕСЯХ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ МОЛЕКУЛЯРНЫМИ МАССАМИ КОМПОНЕНТ

П.Б. Лернер, И.М. Соколов

Показано, что в бинарных газовых смесях с сильным различием в молекулярных массах компонент при не слишком малых концентрациях тяжелого газа существуют две ветви акустических колебаний. Свойства этих мод изучены как в гидродинамическом формализме работы /1/, так и в первом порядке теории возмущений для уравнения Больцмана /2/. Обсуждается физический смысл этих мод.

В работе /1/ сформулирована простая система гидродинамических уравнений, по существу аналогичная кинетическому /2,3/ и полуфеноменологическому /4/ подходам к описанию бинарных газовых смесей. Если молекулярные массы $m_L \ll m_H$, а концентрации газов $N_L \gg N_H$, то в случае /1,2/, когда $\rho_L = N_L m_L \gg \rho_H = N_H m_H$, в системе имеется одна ветвь звуковых колебаний; зависимость скорости звука от частоты носит обычный релаксационный характер с одним (в случае газов с одинаковой структурой молекул) или двумя временами релаксации. При $\rho_L \gtrsim \rho_H$ в высокочастотном пределе имеются две моды звуковых колебаний со скоростями, лежащими выше и ниже скорости низкочастотного звука. В настоящей работе выяснен физический смысл двух ветвей колебаний на примере смеси одноатомных газов типа He-Xe.

При выполнении условия $\sqrt{m_L/m_H} < N_H/N_L < 1$ распространение звука малой амплитуды описывается уравнениями

$$\rho_1 \ddot{u}_1 - \beta_1 u_1'' = \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1),$$
$$\rho_2 \ddot{u}_2 - \beta_2 u_2'' = \eta(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \qquad (1)$$

где $\rho_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ и $u_{1,2}$ – соответственно плотности, упругости и смещения компонент. Система (1) описывает две распределенные колебательные системы, связанные вязким трением. Коэффициент трения $\eta = N_L N_H \sqrt{3 m_L k_B T}\sigma_{tr}$, где k_B – постоянная Больцмана, σ_{tr} – транспортное сечение. Затуханием волн, связанным с эффектами пространственной дисперсии ($\propto \frac{\partial}{\partial t}\Delta u$), и, следовательно, $\propto \omega^3$, пренебрегается.

Дисперсионное уравнение имеет вид (ср. /4/, (32в)):

$$(\zeta - c_1^{-2})(\zeta - c_2^{-2}) - (i/\omega\tau c_1 c_2)(\zeta - c^{-2}) = 0, \qquad (2)$$

где $\zeta = v_s^{-2} = (\vec{k}/\omega)^2$; $c_{1,2} = \sqrt{\beta_{1,2}/\rho_{1,2}}$ – скорости звука, определяемые парциальными свойствами компонент; $c = \sqrt{(\beta_1 + \beta_2)/(\rho_1 + \rho_2)}$ – лапласовская скорость звука; $\tau = (\rho_1 + \rho_2)/\eta$ – характерное время обмена импульсом между компонентами; c_1, c_2, c, τ могут рассматриваться как феноменологические параметры модели, аналогичные трем величинам v_0, v_∞, τ в теории Мандельштама – Леонтовича /5/.

Параметром, определяющим характер ветви, является $\omega\tau$. Для $\omega\tau \gg 1$ имеем

$$v_{1,2} = c_{1,2} + o(1/\omega\tau), \qquad (3)$$

что соответствует слабой связи парциальных мод. При $\omega\tau \ll 1$ лишь одно из решений соответствует распространению звуковых колебаний со скоростью c, определяемой полными плотностью и упругостью. Эта ветвь соответствует обычному звуку в сплошной среде (синфазное колебание компонент). Для второй ветви (противофазное колебание компонент) из (2) получаем

$$\zeta = (i/c_1 c_2 \omega\tau) + o(\omega\tau),$$

что соответствует $k = k' + ik''$, $k' = k'' = \sqrt{\omega/2c_1c_2\tau}$. Такой закон дисперсии описывает диффузионное расплывание пакета с коэффициентом диффузии

$$D = c_1c_2\tau = \gamma^2[\rho_L/(\rho_L + \rho_H)]\sqrt{m_H/m_L}D_{LH} \gg D_{LH},$$

где D_{LH}-коэффициент взаимной диффузии, $\gamma = c_P/c_V$. В силу того, что эта низкочастотная "диффузионная оптическая мода" соответствует противофазному колебанию компонент, она не может быть возбуждена вибратором.

Не оказывая существенного влияния на перенос импульса, диффузионная мода может существенно изменить спектр акустического шума бинарной ячейки. Для отклика системы в (ω,x)-представлении имеем (см. /6/ § 62):

$$\varphi(\omega,x) \propto \int \frac{g(\omega,k)}{\Delta(\omega,k)} e^{ikx}dk \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp(+\sqrt{i\omega/c_1c_2\tau}L) , \qquad (4)$$

где $\Delta(\omega \to 0;\ k) = (\omega^2 - c^2k^2)(i\omega + c_1c_2\tau k^2)$; $g(\omega, k)$ – спектр возмущения; L – характерный линейный размер возмущения. Таким образом, если в системе существует слабая нелинейная связь между модами, в спектре колебаний имеется ω^{-1} особенность, тем более протяженная в область высоких частот, чем меньше (при прочих равных условиях) характерная длина, на которой модулируется состав смеси.

Все рассмотренные колебания – два высокочастотных звука, низкочастотный звук и оптическая диффузионная мода – могут быть получены в первом порядке теории возмущений для кинетического уравнения Больцмана в модифицированном формализме Резибуа /2/. Ограничиться первым порядком можно, ести матричные элементы возмущений, вычисленные по функциям, соответствующим нулевым собственным значениям невозмущенных операторов столкновений, малы в сравнении со следующими собственными значениями этих операторов. В качестве возмущения рассматривается как распространение звука, так и взаимодействие между компонентами. Таким образом, условием применимости метода будет система неравенств:

$$\begin{aligned} &ku_L,\ N_Hu_L\sigma_{tr} < N_L\sigma_{LL}u_L, \\ &ku_H,\ N_L\frac{m_L}{m_H}u_L\sigma_{tr} < N_Hu_H\sigma_{HH}, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $u_{L,N} = \sqrt{3kT/2m_{L,H}}$ – тепловые скорости молекул, а $\sigma_{tr} = \sigma_{LH}$, σ_{LL}, σ_{HH} – сечения соударения молекул соответствующих сортов.

Ограничиваясь первым порядком по k, как и при выводе (1), пренебрежем диссипацией, не связанной с взаимодействием газов, т. е. затуханием, пропорциональным ω^3 (/7/, с. 97).

В /2/ для рассмотрения формально лежащего вне рамок такой теории возмущений случая $\rho_H \ll \rho_L$ (поскольку (5) требует $\rho_L/\rho_H < \sigma_{HH}u_H/\sigma_{tr}u_L$) полагалось $u_H = 0$, хотя $m_H \neq \infty$ в других частях расчета. При этом исключалась термализация тяжелого газа, что соответствовало выключению взаимодействия между его молекулами. Не делая этого предположения, в формализме /2/ имеем точное дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} &\omega^6 - i\omega^5[G_{22}(1+a^2) + G_{33}(1+b^2)] - \omega^4[\tfrac{5}{3}(k^2u_L^2 + k^2u_H^2) + (1+a^2)(1+b^2)G_{22}G_{33}] + \\ &+ i\omega^3\left\{[\tfrac{5}{3}(a^2G_{22} + b^2G_{33}) + G_{33}]k^2u_L^2 + [\tfrac{5}{3}G_{22} + G_{33}(1+\tfrac{5}{3}b^2)]k^2u_H^2\right\} - \\ &- \omega^2[\tfrac{25}{9}k^4u_L^2u_H^2 + k^2u_L^2a^2G_{22}G_{33}(1+\tfrac{5}{3}b^2) + k^2u_H^2(1+\tfrac{5}{3}b^2) + \tfrac{4}{3}k^2u_Lu_HabG_{22}G_{33}] - \\ &- \tfrac{5}{3}i\omega k^4u_L^2u_H^2(1+b^2)G_{33} = 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $a^2 = N_L m_L / N_H m_H \lesssim 1$; $b^2 = N_L / N_H \gg 1$; $G_{22} \approx (1/3) N_H u_L \sigma_{tr}$; $G_{33} = N_H u_L \sigma_{tr} m_L / m_H$ (обозначения этих величин совпадают с введенными в /2/). Для контроля правильности этого выражения была использована система аналитических вычислений REDUCE, адаптированная к PDP 11/70 П.М. Петровым. При $\omega \to \infty$ четыре из решений (6) описывают две высокочастотные звуковые моды: $k_{1,2} = \pm \omega/c_1 + o(1/\omega\tau)$, $k_{3,4} = \pm \omega/c_2 + o(1/\omega\tau)$; при $\omega \to 0$ и $b \gg 1$ имеется одна звуковая мода со скоростью, приближающейся к c и оптическая диффузионная мода. Для нее $k^2 = \sqrt{-i\omega a^2 G_{22}/u_H^2}$, что отличается от поведения, предсказываемого гидродинамической моделью, видом выражения для τ. Это различие связано с тем, что в уравнениях (1) исключены термические эффекты с характерными временами $\tau_{th} \approx \tau\sqrt{m_H/m_L}$, а коэффициент пропорциональности в законе дисперсии $k^2 \propto \omega$ связан с наибольшим характерным временем релаксации в системе.

Исчезновение второй высокочастотной звуковой моды при $N_H \to 0$ связано с нарушением условия $N_L (m_L/m_H) u_L \sigma_{tr} < N_H u_H \sigma_H$. При этом поправки второго порядка теории возмущений, описывающие затухание, оказываются немалыми, и мода становится нераспространяющейся.

Таким образом, в рамках гидродинамического подхода и кинетического уравнения рассмотрено распространение звука в бинарной газовой смеси с сильно различающимися массами компонент при промежуточных концентрациях тяжелой компоненты $\sqrt{m_L/m_H} < N_H/N_L < 1$. Особенностью этого случая является наличие двух высокочастотных мод с различными скоростями; на низких частотах имеется еще одна сильно затухающая "оптическая диффузионная мода" с корневым законом дисперсии.

Авторы благодарны В.С. Старунову за ценные обсуждения и П.М. Петрову за предоставление системы аналитических вычислений REDUCE.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лернер П.Б., Соколов И.М. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 49 (1985).
2. Алексеев В.А., Федоров П.Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 4, 7 (1985).
3. Letamendia L., Nouchi G., Yip S. Phys. Rev. A, 32, 1082 (1985).
4. Liboff R. Journ. Acoust. Soc. Am., 32, 661 (1964).
5. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. ЖЭТФ, 7, 438 (1938).
6. Лифшиц Е.М., Питаевский А.Г. Физическая кинетика. М., Наука, 1979.
7. Балеску Р. Неравновесная и равновесная статистическая механика, т. 2, М., Мир, 1978.

Поступила в редакцию 13 декабря 1985 г.