

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОЛЯ ДИРЕКТОРА ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ТОМОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В.Ф. Китаева, Н.Г. Преображенский, С.И. Трашкеев

Получено нелинейное интегральное уравнение, связывающее пространственную зависимость угла ориентации директора жидкого кристалла с набегом фазы луча, прошедшего через кристалл. Предложен метод его решения, обсуждены возможности выхода за рамки принятых ограничений.

Компьютерная томография (КТ) анизотропных сред является сложной и почти не разработанной проблемой /1/. Однако можно указать ситуации, когда применение техники КТ для послойного восстановления внутренней структуры анизотропного тела оказывается вполне естественным и, при наличии определенной априорной информации о восстанавливаемой функции, сводится к довольно простой обратной задаче.

Такая ситуация возникает, в частности, при исследовании эффекта Фредерикса в нематическом жидком кристалле (НЖК), когда последний заключен в ячейку с плоскопараллельными стенками и до внешнего искажения соответствующим образом ориентирован (планарно или гомеотропно) /2,3/. Рассмотрим каким образом в данном случае может быть выполнен томографический эксперимент, цель которого — восстановить распределение $\Theta(z)$, где Θ — угол, определяющий ориентацию вектора-директора $\vec{n}(z)$ (0, $\sin\Theta(z)$, $\cos\Theta(z)$) на разных расстояниях z от передней стенки ячейки: $0 \leq z \leq d$.

Направим на ячейку под углом α зондирующий лазерный луч, лежащий в плоскости (y, z) , предполагая, что он не вносит заметных возмущений в распределение $\Theta(z)$, которое создано статическим или световым полем, гидродинамикой течения НЖК, "закруткой" кристалла, смешанной ориентацией $\vec{n}(z)$ у границ ячейки и т.п. В приближении геометрической оптики /4/ запишем выражение для набега фазы $\psi(\alpha)$ такой волны на выходе из ячейки:

$$\psi(\alpha) = (\epsilon_{\perp}^{1/2} / \cos\alpha) \int_0^d dz [1 + (\epsilon_a / \epsilon_{\perp}) \cos^2(\Theta - \alpha)]^{-1/2}, \quad (1)$$

где $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ — анизотропия диэлектрической проницаемости НЖК на световой частоте. Запись (1) предполагает возможность не учитывать рефракцию в среде, считать ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} постоянными и известными величинами, а при варьировании α не брать слишком больших значений этого угла.

Томографический эксперимент состоит в том, что на основании измерений, например, интерференционным методом /1,5/, зависимости интегрального набега фазы от угла α из решения уравнения (1) определяется распределение $\Theta(z)$. Конкретный случай интерферометрии, относящийся непосредственно к жидкому кристаллу (однако без решения обратной задачи), описан в /6/.

Для восстановления $\Theta(z)$ из (1) воспользуемся приемом формальной линеаризации нелинейного интегрального уравнения, который уже применялся ранее Л.Л. Фруминим и одним из авторов при решении обратных задач молекулярной физики и физики плазмы /7,8/. Введем следующие обозначения:

$$d\xi = (d\Theta/dz) dz = dz/u(\xi); \quad S(\alpha) = \psi(\alpha) \epsilon_{\perp}^{-1/2} \cos\alpha;$$

$$F(\xi, \alpha) = [1 + (\epsilon_a / \epsilon_{\perp}) \cos^2(\xi - \alpha)]^{-1/2};$$

$$\xi_1 = \Theta(z=0), \quad \xi_2 = \Theta(z=d).$$

Тогда из (1) получим уравнение

$$S(a) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi, a) u(\xi) d\xi, \quad (2)$$

которое представляет собой стандартное уравнение Фредгольма I рода с заданным ядром. Решая его относительно $u(\xi)$, находим связь переменной z с верхним пределом интегрирования в соотношении

$$z = \int_{\xi_1}^{\Theta} u(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) должно проводиться с использованием методов регуляризации. В данных расчетах применялись алгоритмы А.Н. Тихонова и статистической регуляризации.

Была выполнена серия модельных расчетов. Вычислялось 21 значение луч-сумм $S(a)$, причем угол a менялся в интервале $-\pi/12 \leq a \leq \pi/12$. В качестве точных модельных функций выбирались:

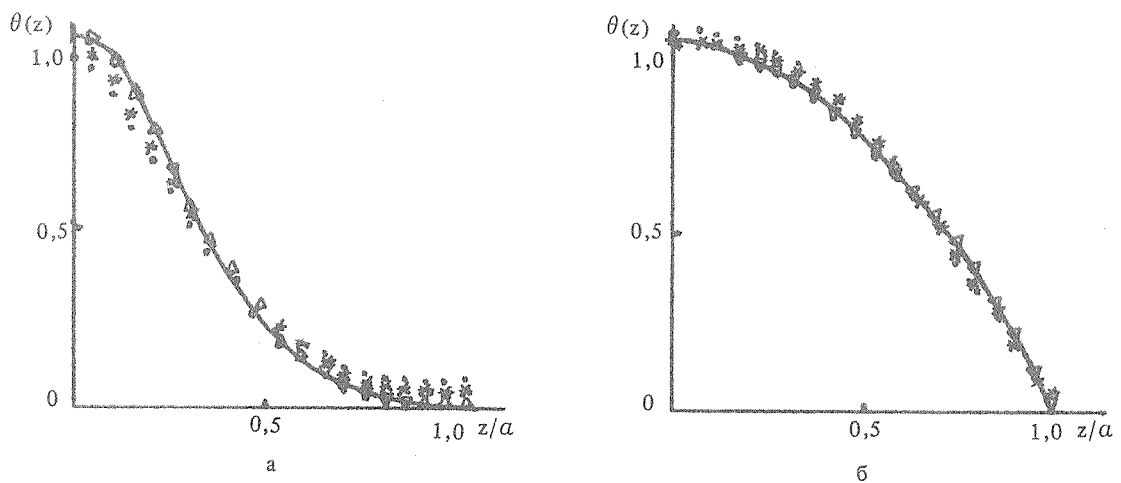
$$\Theta_1(z) = 4(d/2 - z)(d/2 + z)/d^2, \quad (4)$$

$$\Theta_2(z) = \exp[-(z/w)^2], \quad w = \text{const}. \quad (5)$$

На рис. 1 эти функции изображены сплошными линиями. Там же приведены результаты восстановления с помощью уравнений (2) и (3): треугольники соответствуют случаю, когда в $S(a)$ погрешность не вносилась (т.е. оставались лишь ошибки машинного счета); звездочки — когда в $S(a)$ вводилась распределенная по нормальному закону 5%-ная погрешность; кружочки — 10%-ная погрешность. Как видно, алгоритм решения обратной задачи вполне устойчив и коэффициент усиления погрешности не превышает единицы.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно возможностей выхода за рамки принятых выше ограничений.

а) Для восстановления сложных, немонотонных распределений $\Theta(z)$ необходимо привлекать методы дескриптивной регуляризации с более подробной и конкретной априорной информацией о поле директора [9]. Формальное применение методов глобальной регуляризации (например, по А.Н. Тихонову) может привести к неединственному решению.



Р и с. 1. Восстановление распределений. (4) "а" и (5) "б" томографическим методом.

б) Переход к томографической интроскопии трехмерной фазовой неоднородности (с учетом рефракции в слабонелинейной постановке) для случая НЖК может производиться на основе итерационного алгоритма, разработанного в /10/.

в) Обобщение расчетов на двух- или трехмерный случай приводит к необходимости решать задачу дифракционной томографии /11/. Например, если светоиндуцированный переход Фредерикса наблюдается в узком лазерном пучке, когда расстояние R от ячейки до плоскости локализации интерференционных полос оказывается величиной порядка $R \sim \Delta^2/\lambda$, где Δ — характерный размер изменения показателя преломления, λ — длина волны, использование соотношения (1) перестает быть корректным. В таком случае нужно пользоваться алгоритмами дифракционной КТ, которые интенсивно разрабатываются в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deans S. R. The Radon transform and some of its applications. N.Y., Wiley, 1983.
2. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М., Наука, 1978.
3. Золотко А. С. и др. Письма в ЖЭТФ, 37, 170 (1980).
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980.
5. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М., Мир, 1982.
6. Peri D., Ignier D. Molecular Cryst. & Liq. Cryst. (Letters), 102, 87 (1984).
7. Преображенский Н. Г., Фрумин Л. Л. Изв. ВУЗов, физика, № 6, 30 (1980).
8. Преображенский Н. Г., Фрумин Л. Л. Препринт ИТПМ СО АН СССР, № 26-83, Новосибирск, 1983.
9. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск, Наука, 1982.
10. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г., Трашкеев С. И. Оптика и спектроскопия, 58, 1357 (1985).
11. Slaney M., Kak A. C. Proc. SPIE — Inverse Optics, 413, 2 (1983).

Поступила в редакцию 10 февраля 1986 г.